

CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N°3

Exercice 1

1. Comme $z = 1 + 2i$,

$$z_I = \frac{1}{2} \left(1 + 2i - \frac{1}{1 + 2i} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + 2i - \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + 2i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i \right)$$

i.e. $\boxed{z_I = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i}$.

2. $M' = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = z \Leftrightarrow -1 = z^2 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z + i)(z - i) \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = i$.

Ainsi, les points invariants sont les points d'affixes respectives i et $-i$.

3. a. Ecrivons z_I sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{1}{2} \left(x + iy - \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(x + iy)(x^2 + y^2) - (x - iy)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2) - x + iy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x(x^2 + y^2 - 1) + iy(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Comme x et y sont réels, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_I) = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_I) = \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}}.$$

- b. Le point I appartient à l'axe des abscisses si et seulement si

$$\operatorname{Im}(z_I) = 0 \Leftrightarrow \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \\ 2(x^2 + y^2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x; y) \neq (0; 0) \end{cases}$$

car $x^2 + y^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = 0$ privée de O i.e. l'axe des abscisses privé de l'origine du repère.

- c. Le point I appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si

$$\operatorname{Re}(z_I) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 2(x^2 + y^2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x; y) \neq (0; 0) \end{cases}$$

Or, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$ qui est une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $x = 0$ privée de O et du cercle de centre O et de rayon 1 i.e. la réunion de l'axe des ordonnées privé de l'origine du repère avec le cercle trigonométrique.

- d. Si M est un des points d'intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ alors I appartient à la fois à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées donc, dans ce cas, $\boxed{I = O}$.

Exercice 2

1. Soit la proposition $P_n : \ll 1 \leq u_n \leq 3 \gg$.

Par définition, $u_0 = a \in]1; 3[$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $1 \leq u_k \leq 3$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, $1 \geq \frac{1}{u_k} \geq \frac{1}{3}$. En multipliant par $-3 < 0$, on en déduit que $-3 \leq -\frac{3}{u_k} \leq -1$ et donc $4 - 3 \leq 4 - \frac{3}{u_k} \leq 4 - 1$ i.e. $1 \leq u_{k+1} \leq 3$.

Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 3}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{u_n} - u_n = \frac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 3}{u_n}.$$

Or, $(3 - u_n)(u_n - 1) = 3u_n - 3 - u_n^2 + u_n = -u_n^2 + 4u_n - 3$. Ainsi, $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question 1, $3 - u_n \geq 0$ et $u_n - 1 \geq 0$ donc $(3 - u_n)(u_n - 1) \geq 0$.

De plus, $u_n \geq 1$ donc $u_n > 0$. On en déduit que $\frac{(3 - u_n)(u_n - 1)}{u_n} \geq 0$ i.e. d'après la question 2.a, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

3. D'après la question 2.b, (u_n) est croissante et d'après la question 1, (u_n) est majorée par 3. On déduit alors du théorème des suites monotones que (u_n) converge vers une limite $\ell \leq 3$.

De plus, $\lim u_{n+1} = \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ donc, par opérations sur les limites et étant donné que $\ell \neq 0$ car (u_n) est minorée par $u_0 = a > 0$, on a $\lim u_{n+1} = 4 - \frac{3}{\ell}$.

Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}) , $\ell = 4 - \frac{3}{\ell}$ i.e. $4 - \frac{3}{\ell} - \ell = 0$. Dès lors, par un calcul analogue à celui de la question 2.a, on en déduit que $\frac{(3 - \ell)(\ell - 1)}{\ell} = 0$. Il s'ensuit que $(3 - \ell)(\ell - 1) = 0$ donc $\ell = 3$ ou $\ell = 1$. Or, comme on l'a dit, (u_n) est minorée par $a > 1$ donc $\ell > 1$. Ainsi, $\boxed{\ell = 3}$.
Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (facultatif)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous allons démontrer que $v_{n+1} \leq v_n$.

Par définition, v_{n+1} est égal soit à u_{n+1} soit à u_{n+2} . Or, par définition, $v_n \geq u_n$ et $v_n \geq u_{n+1}$ donc

$$u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(v_n + v_n) = v_n.$$

Ainsi, on a à la fois $u_{n+1} \leq v_n$ et $u_{n+2} \leq v_n$ donc $v_{n+1} \leq v_n$.

On conclut donc que (v_n) est décroissante. De plus, comme les nombres u_n sont positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) est minorée par 0. On déduit alors du théorème des suites monotones que (v_n) converge vers une limite ℓ .

Montrons que (u_n) converge également vers ℓ . Pour commencer, notons que, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Considérons un entier $n \geq 1$. Distinguons deux cas :

- si $u_{n+1} \geq u_n$ alors $v_n = u_{n+1}$. Or, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_n)$ donc $u_n \geq 2u_{n+1} - u_{n-1}$. Dès lors, $u_n \geq 2v_n - u_{n-1}$. Or, par définition, $u_{n-1} \leq v_{n-1}$ donc $-u_{n-1} \geq -v_{n-1}$ et, ainsi, $u_n \geq 2v_n - v_{n-1}$.

- si $u_{n+1} < u_n$ alors $v_n = u_n$. Or, comme (v_n) est décroissante, $v_n - v_{n-1} \leq 0$. Dès lors, $v_n + (v_n - v_{n-1}) \leq v_n$ i.e. $2v_n - v_{n-1} \leq u_n$.

Finalement, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2v_n - v_{n-1} \leq u_n \leq v_n$.

Or, $\lim v_n = \ell$ donc $\lim v_{n-1} = \ell$ et donc, par opération, $\lim(2v_n - v_{n-1}) = 2\ell - \ell = \ell$.

Grâce au théorème d'encadrement, on conclut que (u_n) converge et que $\lim u_n = \ell$.