

**DEVOIR À LA MAISON N°3**

A rendre le mercredi 5 novembre 2014

**Exercice 1.** — Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .Dans tout l'exercice,  $z$  est un nombre complexe non nul.À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = -\frac{1}{z}$ , puis le point  $I$  milieu du segment  $[MM']$ .

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On suppose, dans cette question uniquement, que  $M$  est le point d'affixe  $z = 1 + 2i$ .  
Démontrer que l'affixe de  $I$  est alors  $z_I = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$ .
2. Déterminer les affixes des points  $M$  tels que  $M' = M$ .
3. Dans cette question,  $M$  est un point du plan, distinct de  $O$ , d'affixe  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.
  - a. Démontrer que la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de  $I$  sont :

$$\operatorname{Re}(z_I) = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z_I) = \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}.$$

- b. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  du plan pour lesquels  $I$  appartient à l'axe des abscisses.
  - c. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $M$  du plan pour lesquels  $I$  appartient à l'axe des ordonnées.
  - d. On suppose que  $M$  est un des points d'intersection de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .  
Que peut-on dire du point  $I$  dans ce cas ?

**Exercice 2.** — Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]1; 3[$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ .

1. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq 3$ .
2.
  - a. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(u_n - 1)}{u_n}$ .
  - b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante.
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 3 (facultatif).** — On considère une suite de réels positifs  $(u_n)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

Démontrer que  $(u_n)$  est convergente. On pourra commencer par s'intéresser à la suite  $(v_n)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est le maximum des deux nombres  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .