Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 30 septembre 2021

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+2u_n}.$$

On admet que cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Écrire en langage Python une fonction `terme` telle que, pour tout entier naturel n, `terme(`n`)` renvoie la valeur de u_n.

3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{5x}{1+2x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

  a. Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

  b. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 2.$$

  c. Quelles propriétés de la suite (u_n) a-t-on démontré à la question précédente ?

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

  a. Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

5. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2 \times 5^{n-1}}{1+5^{n-1}}.$$

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  a. Calculer S_0, S_1 et S_2.

  b. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
  La suite (S_n) est-elle minorée ?

  c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$ et en déduire, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geqslant n$.
  La suite (S_n) est-elle majorée ?

  d. (facultatif) Déterminer le plus grand réel k tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geqslant kn$.