Corrigé du devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. Première méthode

a. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, on conclut que $\boxed{\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}}$.

De même, $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$, on conclut que $\boxed{\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}}$.

Enfin, $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ donc, comme $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$, on conclut que $\boxed{\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}}$.

b. La droite (EI) est incluse dans le plan (ABF) et K n'appartient pas à ce plan donc E, I et K ne sont pas alignés et ainsi $\boxed{\overrightarrow{EI} \text{ et } \overrightarrow{EK} \text{ ne sont pas colinéaires}}$.

c. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{EI} + b\overrightarrow{EK}$. Alors, d'après la question **1.a.**,

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = a\left(\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\right) + b\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}\right)$$

et donc

$$(1-a-b)\overrightarrow{EA} + \left(1 - \frac{1}{2}a - b\right)\overrightarrow{EF} + \left(\frac{1}{2} - b\right)\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{0}.$$

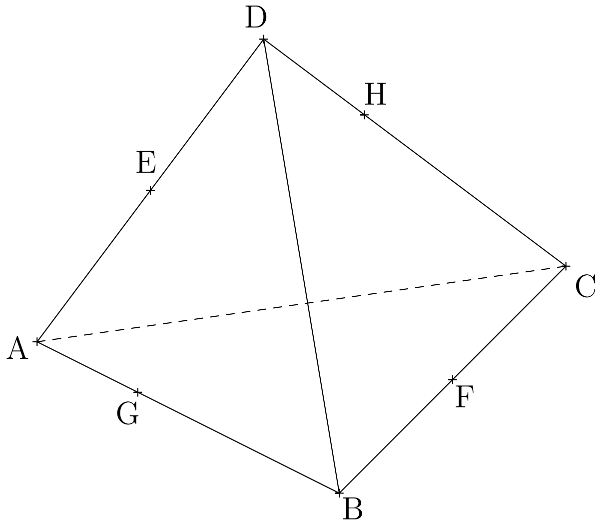
De plus, le point G n'appartient pas au plan (AEF) donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont linéairement indépendants. Ainsi, $1-a-b=0$, $1-\frac{1}{2}a-b=0$ et $\frac{1}{2}-b=0$. On déduit de la première égalité que $b-1=-a$ et de la seconde que $b-1=-\frac{1}{2}a$ donc $a=\frac{1}{2}a$ i.e. $a=0$. Ainsi, $b=1$ mais ceci est contradictoire avec la troisième égalité. Ainsi, il n'existe pas de réels a et b tels que $\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{EI} + b\overrightarrow{EK}$ donc, comme $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EK}$ ne sont pas colinéaires, on conclut que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EK}$ ne sont pas coplanaires et donc $\boxed{\text{les points E, I, J et K ne sont pas coplanaires}}$.

2. Seconde méthode

a. Comme $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$, EACG est un parallélogramme donc (EG) est parallèle à (AC). De plus, par le théorème de la droite des milieux, (AC) est parallèle à (IJ) donc $\boxed{\text{(EG) est parallèle à (IJ)}}$.

b. Comme (EG) et (IJ) sont parallèles, les points E, G, I et J sont coplanaires. Ainsi, le plan (EGI) est confondu avec le plan (IJG). Si K appartenait au plan (EGI), les points I, J, G et K seraient coplanaires i.e. I appartiendrait au plan (JKG) ce qui n'est pas le cas. Ainsi, K n'appartient pas au plan (EGI) i.e. K n'appartient pas au plan (EIJ) puisque E, G, K et J sont coplanaires. On conclut donc que $\boxed{\text{les points E, I, J et K ne sont pas coplanaires}}$.

Exercice 2. — On peut faire une figure pour illustrer l'énoncé



On exprime les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On a

- $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

- $\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EH}} &= \overrightarrow{\mathrm{ED}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}} - \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}} - \overrightarrow{\mathrm{EG}}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ sont coplanaires et donc $\boxed{\text{les points E, F, G et H sont coplanaires}}$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

Dans cette différence, les termes s'annulent deux à deux sauf les deux derniers de la première somme et le premier de la seconde donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}.$$

Or, $2n+2 \geqslant 2n+1 \geqslant 2n > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n}$ et ainsi

$$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} - \frac{1}{n} = 0.$$

On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

2. Comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par son premier terme $u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une somme de termes positifs donc u_n est positif. Ainsi, (u_n) est minorée par 0.

On conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k compris entre n et $2n$, $0 < k \leqslant 2n$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$. Ainsi, u_n est une somme de $2n - n + 1 = n + 1$ termes qui sont tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$ donc $u_n \geqslant (n+1) \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$. On conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } \frac{1}{2}}$.

Soit un entier $M \in \mathbb{R}_+$. Alors, en remarquant que

$$\begin{aligned}
v_{2^{2M+2}-2} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{14}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{2M+1}-1} + \cdots + \frac{1}{2^{2M+2}-2}\right) \\
&= u_1 + u_3 + u_7 + \cdots + u_{2^{2M+1}-1} \\
&= u_{2^1-1} + u_{2^2-1} + u_{2^3-1} + \cdots + u_{2^{2M+1}-1}
\end{aligned}$$

on voit que $v_{2^{2M+2}-2}$ est une somme de $2M+1$ termes qui sont tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$ puisque (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$. Dès lors, il vient

$$v_{2^{2M+2}-2} \geqslant (2M+1) \times \frac{1}{2} = M + \frac{1}{2} > M.$$

Ainsi, pour tout réel $M \geqslant 0$, il existe un entier n tel que $v_n > M$ donc (v_n) n'est pas majorée et donc $\boxed{(v_n) \text{ n'est pas bornée}}$.