Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 27 septembre 2018

Exercice 1. — Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$ définie sur $[1\,;2]$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur $[1\,;2]$.

b. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leqslant 2.$$

2. a. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(3+u_n)}{u_n + 4}.$$

b. En déduire les variations de (u_n).

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n+3}{u_n-1}$.

a. Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction n.

Exercice 2. — On considère une suite réelle (a_n) strictement croissante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$ et $a_n \leqslant n$.

Déterminer la suite (a_n).

Exercice 3 (facultatif). — On considère la suite (c_n) définie par $c_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_1 + c_nc_0.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 3^{n-2}$.

Indication — On pourra considérer, pour tout entier $n \geqslant 5$, la proposition P_n : « pour tout entier naturel $i \leqslant n, c_i \geqslant 3^{i-2}$ ».