

Corrigé du devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. La fonction f est dérivable sur $[1; 2]$ comme quotient de deux fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x \in [1; 2] \quad f'(x) &= \frac{2 \times 2x \times (x^2 + 1) - (2x^2 + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 4x - (4x^3 + 2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} > 0\end{aligned}$$

Ainsi, f est croissante sur $[1; 2]$.

2. Considérons la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étant donné que $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \frac{3}{2}$, on a $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ donc, par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$, $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$ i.e. $\frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \frac{9}{5}$ et donc, à plus forte raison, $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ i.e.

(u_n) est croissante et bornée par 1 et 2.

3. Si $u_0 = 2$ alors $u_1 = f(2) = \frac{9}{5} < u_0$ donc (u_n) n'est pas croissante. On peut, par une récurrence identique à la précédente montrer que, dans ce cas, (u_n) est en fait décroissante.

Exercice 2

1. a. Par définition,

$$z_{A'} = \frac{i+2}{i-1} = \frac{(2+i)(-1-i)}{(-1)^2 + 1^2} = \frac{-2 - 2i - i - i^2}{2} = \frac{-1 - 3i}{2}$$

i.e. $z_{A'} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

De même,

$$z_{A''} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + 2}{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i} = \frac{1-i}{-1-i} = \frac{(1-i)(-1+i)}{(-1)^2 + (-1)^2} = \frac{-1+i+i-i^2}{2} = \frac{2i}{2}$$

i.e. $z_{A''} = i$.

On constate que $z_A = z_{A''}$ donc $A = A''$.

- b. Soit un complexe $z \neq 1$. Comme $2 \neq -1$, $z+2 \neq z-1$ et donc $\frac{z+2}{z-1} \neq 1$ i.e. $z' \neq 1$.

- c. D'après la question précédente, $z' \neq 1$ donc, par définition, l'axe de M'' est

$$z'' = \frac{z' + 2}{z' - 1} = \frac{\frac{z+2}{z-1} + 2}{\frac{z+2}{z-1} - 1} = \frac{z+2+2(z-1)}{z+2-(z-1)} = \frac{3z}{3} = z$$

donc $M'' = M$.

2. Pour tout $z \neq 1$,

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{z+2}{z-1} = z \Leftrightarrow z+2 = z(z-1) \Leftrightarrow z^2 - 2z - 2 = 0.$$

Le discriminant de $z^2 - 2z - 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles :

$$z_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Ainsi, les points invariants sont les points d'affixes $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

3. a. On a

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x + iy + 2}{x + iy - 1} = \frac{x + 2 + iy}{x - 1 + iy} = \frac{(x + 2 + iy)(x - 1 - iy)}{(x - 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{(x + 2)(x - 1) - i(x + 2)y + y(x - 1)i - i^2 y^2}{(x - 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - x + 2x - 2 + y^2 + x - 2 + i(-xy - 2y + xy - y)}{(x - 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + x - 2}{(x - 1)^2 + y^2} + i \frac{-3y}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Re}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x - 2}{(x - 1)^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z') = \frac{-3y}{(x - 1)^2 + y^2}}.$$

b. En écrivant $z = x + iy$ sous forme algébrique, d'après la question 3.a,

$$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{-3y}{(x - 1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses privé du point d'affixe 1.

c. De même,

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + x - 2}{(x - 1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - 0)^2 - 2 = 0 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - (-\frac{1}{2}))^2 + (y - 0)^2 = (\frac{3}{2})^2 \\ (x; y) \neq (1; 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{F}$ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{3}{2}$ privé du point d'affixe 1.

Exercice 3. — On sait (vu en exercice) que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $i^{4p} = 1$, $i^{4p+1} = i$, $i^{4p+2} = -1$ et $i^{4p+3} = -i$ donc $\operatorname{Re}(i^{4p}) = 1$, $\operatorname{Re}(i^{4p+1}) = 0$, $\operatorname{Re}(i^{4p+2}) = -1$ et $\operatorname{Re}(i^{4p+3}) = 0$. De plus, la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles. Remarquons également que si t , x et y sont

des réelles $t(x + iy) = tx + i(ty)$ donc, pour tout complexe z et tout réel t , $\operatorname{Re}(tz) = t \operatorname{Re}(z)$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k i^k \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k \operatorname{Re}(i^k).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{4m} = \frac{1}{4m+1} [0 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 + 4 \times 1 + 5 \times 0 + 6 \times (-1) + 7 \times 0 + \dots \\ + (4m-3) \times 0 + (4m-2) \times (-1) + (4m-1) \times 0 + 4m \times 1]$$

donc, en utilisant le fait que $1 + 3 + \dots + 2m - 1 = m^2$ (également vu en exercice),

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4m+1} (-2 + 4 - 6 + 8 - \dots - (4m-2) + 4m) \\ &= \frac{2}{4m+1} (-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - (2m-1) + 2m) \\ &= \frac{2}{4m+1} [2(1 + 2 + \dots + m) - (1 + 3 + \dots + 2m-1)] \\ &= \frac{2}{4m+1} \left[2 \frac{m(m+1)}{2} - m^2 \right] \\ &= \frac{2}{4m+1} (m^2 + m - m^2) \\ &= \frac{2m}{4m+1} \end{aligned}$$

Or, $0 \leq \frac{2m}{4m+1} \leq \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_{4m} \leq \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons $n = 4m + r$ avec $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Alors,

$$u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k \operatorname{Re}(i^k) = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{4m} k \operatorname{Re}(i^k) + R \right]$$

en posant

- $R = 0$ si $r = 0$;
- $R = (4m+1) \operatorname{Re}(i^{4m+1}) = 0$ si $r = 1$;
- $R = (4m+1) \operatorname{Re}(i^{4m+1}) + (4m+2) \operatorname{Re}(i^{4m+2}) = -(4m+2)$ si $r = 2$;
- $R = (4m+1) \operatorname{Re}(i^{4m+1}) + (4m+2) \operatorname{Re}(i^{4m+2}) + (4m+3) \operatorname{Re}(i^{4m+3}) = -(4m+2)$ si $r = 3$.

Ainsi, $R = 0$ si $r = 0$ ou $r = 1$ et $R = -4m - 2$ si $r = 2$ ou $r = 3$.

Dès lors, si $r = 0$ ou $r = 1$ alors

$$u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{4m} k \operatorname{Re}(i^k) = \frac{1}{4m+r+1} \times 4mu_{4m} = \frac{4m}{4m+r+1} u_{4m}$$

Or, $0 \leq \frac{4m}{4m+r+1} \leq 1$ et $0 \leq u_{4m} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, si $r = 2$ ou $r = 3$ alors

$$u_n = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{4m} k \operatorname{Re}(i^k) - 4m - 2 \right] = \frac{1}{4m+r+1} (4mu_{4m} - 4m - 2) = \frac{4m}{4m+r+1} u_{4m} - \frac{4m+2}{4m+r+1}$$

Comme précédemment, $[*] \ 0 \leq \frac{4m}{4m+r+1}u_{4m} \leq \frac{1}{2}$. De plus, comme $r \geq 2$,

$$4m + r + 1 \geq 4m + 3 > 0$$

donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{4m+r+1} \leq \frac{1}{4m+3}$. Dès lors,

$$0 \leq \frac{4m+2}{4m+r+1} \leq \frac{4m+2}{4m+3} \leq 1$$

et, ainsi, $[**] \ -1 \leq -\frac{4m+2}{4m+r+1} \leq 0$. En additionnant membre à membre $[*]$ et $[**]$, on conclut que $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$.