

Devoir à la maison n°2

À rendre le jeudi 5 octobre 2017

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 1}{u_n^2 + 1}.$$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$ définie sur $[1; 2]$.
Étudier les variations de f sur $[1; 2]$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée et croissante.
3. La suite (u_n) aurait-elle eu le même sens de variation si on avait choisi $u_0 = 2$? (Justifier.)

Exercice 2. — Dans tout cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

À tout nombre complexe z différent de 1, on associe le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{z + 2}{z - 1}.$$

Si M est un point du plan complexe d'affixe $z \neq 1$, le point M' d'affixe z' est appelé l'image de M .

1. **a.** Soit A le point d'affixe $z_A = i$.
Déterminer l'affixe du point A' , image du point A puis l'affixe du point A'' , image du point A' . (On détaillera les calculs.)
Que constate-t-on?
- b.** Démontrer que, pour tout $z \neq 1$, $z' \neq 1$.
- c.** Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 1$. On note M' l'image du point M et M'' l'image du point M' .
Démontrer que $M'' = M$.
2. Déterminer les points invariants c'est-à-dire les points M tels que $M = M'$.
3. **a.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit z sous forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .
- b.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan complexe dont l'image M' appartient à l'axe réel.
- c.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan complexe dont l'image M' appartient à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 3 (facultatif). — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k i^k \quad \text{et} \quad u_n = \operatorname{Re}(S_n).$$

La suite (u_n) est-elle bornée?

(*Indication.* — On pourra commencer par calculer explicitement u_{4m} pour tout $m \in \mathbb{N}$ puis utiliser, sans démonstration, le fait que tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $n = 4m + r$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ et discuter selon la valeur de r .)