

Correction du devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. Par définition,

$$z_{A'} = (-3 + 2i)^2 + 5(-3 + 2i) + 8 = 9 - 12i + 4i^2 - 15 + 10i + 8 = 9 - 12i - 4 - 15 + 10i + 8$$

$$\text{donc } \boxed{z_{A'} = -2 - 2i}.$$

2. a. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z^2 \in \mathbb{R}$ donc $z^2 + 5z + 8 \in \mathbb{R}$ i.e. $z' \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'affirmation 1 est vraie.

b. Si $z = i$ alors $z' = i^2 + 5i + 8 = 7 + 5i$ n'est pas un imaginaire pur. Ainsi, l'affirmation 2 est fausse.

3. Chercher les points M tels que $M = M'$ revient à chercher les affixes z telles que $z = z'$. Or,

$$z = z' \Leftrightarrow z = z^2 + 5z + 8 \Leftrightarrow z^2 + 4z + 8 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $z^2 + 4z + 8$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0$ donc l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -2 + 2i.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les points invariants sont les points } A(-2 - 2i) \text{ et } B(-2 + 2i)}.$

4. Par définition,

$$z' = (x + iy)^2 + 5(x + iy) + 8 = x^2 + 2ixy - y^2 + 5x + 5iy + 8 = x^2 - y^2 + 5x + 8 + i(2xy + 5y)$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Re}(z') = x^2 - y^2 + 5x + 8 \text{ et } \text{Im}(z') = 2xy + 5y}.$$

5. a. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan complexe tels que M' soit sur l'axe réel. Alors,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 2xy + 5y = 0 \Leftrightarrow y(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}.$$

On conclut donc que $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) et de la droite d'équation $x = -\frac{5}{2}$.

b. La réciproque de l'affirmation 1 est fausse puisque si $z = -\frac{5}{2} + i$ alors $M(z) \in \mathcal{E}$ donc $z' \in \mathbb{R}$ mais $z \notin \mathbb{R}$.

6. Soit z un imaginaire pur écrit sous forme algébrique $z = iy$. Alors, d'après la question 4, on a alors $\text{Re}(z') = 0^2 - y^2 + 5 \times 0 + 8 = -y^2 + 8$. On en déduit donc que z' est imaginaire pur si et seulement si

$$-y^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \sqrt{8} \text{ ou } y = -\sqrt{8} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \text{ ou } y = -2\sqrt{2}.$$

On en déduit qu'il existe deux imaginaires purs z tels que z' soit imaginaire pur : il s'agit de $2i\sqrt{2}$ et $-2i\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est donc vraie.}}$

Exercice 2. — Le calcul des premiers termes de la suite donne les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llll} z_0 = 1 + 2i; & z_1 = 1 + 3i; & z_2 = 4i; & z_3 = -2 + 4i; \\ z_4 = -4 + 2i; & z_5 = -4 - 2i; & z_6 = -6i; & z_7 = 8 - 6i; \\ z_8 = 16 + 2i; & z_9 = 16 + 18i; & z_{10} = 34i & \end{array}$$

Il semble que z_n soit imaginaire pur lorsque n est de la forme $n = 4q + 2$ avec $q \in \mathbb{N}$. Montrons-le par récurrence sur q .

Pour $q = 0$, c'est vrai puisque $z_2 = 4i$. Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $u_{4k+2} \in i\mathbb{R}$. Alors, il existe un réel b tel que $u_{4k+2} = ib$. On en déduit que

$$u_{4k+3} = (1 + i)(ib) + 2 = 2 - b + ib$$

donc

$$u_{4k+4} = (1 + i)(2 - b + ib) + 2 = 4 - 2b + 2i$$

donc

$$u_{4k+5} = (1 + i)(4 - 2b + 2i) + 2 = 4 - 2b + (6 - 2b)i$$

et finalement

$$u_{4(k+1)+2} = u_{4k+6} = (1 + i)(4 - 2b + (6 - 2b)i) + 2 = (10 - 4b)i$$

donc $u_{4(k+1)+2}$ est imaginaire pur, ce qui montre l'hérédité.

On a donc démontré que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, u_{4q+2} est imaginaire pur, ce qui montre qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que u_n soit imaginaire pur.

Autre méthode. — Considérons la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = z_n - 2i$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = z_{n+1} - 2i = (1 + i)z_n + 2 - 2i = (1 + i)z_n - 2i(1 + i) = (1 + i)(z_n - 2i) = (1 + i)w_n.$$

Par un rapide raisonnement par récurrence, on en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (1 + i)^n w_0 = (1 + i)^n$ et donc $z_n = (1 + i)^n + 2i$.

Remarquons que $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$ donc, si n est de la forme $n = 4q + 2$ avec $q \in \mathbb{N}$ alors

$$u_n = (1 + i)^{4q+2} + 2i = [(1 + i)^4]^q \times (1 + i)^2 + 2i = (-4)^q \times 2i + 2i = 2[1 + (-4)^q]i$$

donc u_n est imaginaire pur et on conclut de même.