

## Devoir à la maison n°2

À rendre le lundi 3 octobre 2016

**Exercice 1.** — À tout nombre complexe  $z$ , on associe le nombre complexe  $z'$  défini par :

$$z' = z^2 + 5z + 8.$$

Si  $M$  est un point du plan complexe d'affixe  $z$ , le point  $M'$  d'affixe  $z'$  est appelé l'image de  $M$ . Dans ce cas, on dit également que  $M$  est un antécédent du point  $M'$ .

1. Soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = -3 + 2i$ .  
Déterminer l'affixe du point  $A'$ , image du point  $A$ . (On détaillera les calculs.)
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.
  - a. Affirmation 1 : « pour tout complexe  $z$ , si  $z$  est réel alors  $z'$  est réel ».
  - b. Affirmation 2 : « pour tout complexe  $z$ , si  $z$  est imaginaire pur alors  $z'$  est imaginaire pur ».
3. Déterminer les points invariants c'est-à-dire les points  $M$  tel que  $M = M'$ .
4. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On écrit  $z$  sous forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.  
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
5.
  - a. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan complexe tels que  $M'$  soit sur l'axe réel.
  - b. La réciproque de l'affirmation 1 (question 2.a.) est-elle vraie ?
6. L'affirmation suivante est-elle vraie ?  
Affirmation 3 : « il existe un imaginaire pur  $z$  tel que  $z'$  soit un imaginaire pur ».

**Exercice 2 (facultatif).** — On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par

$$\begin{cases} z_0 = 1 + 2i \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2 \end{cases}.$$

Le nombre d'entiers naturels  $n$  tel que  $z_n \in i\mathbb{R}$  est-il fini ?