

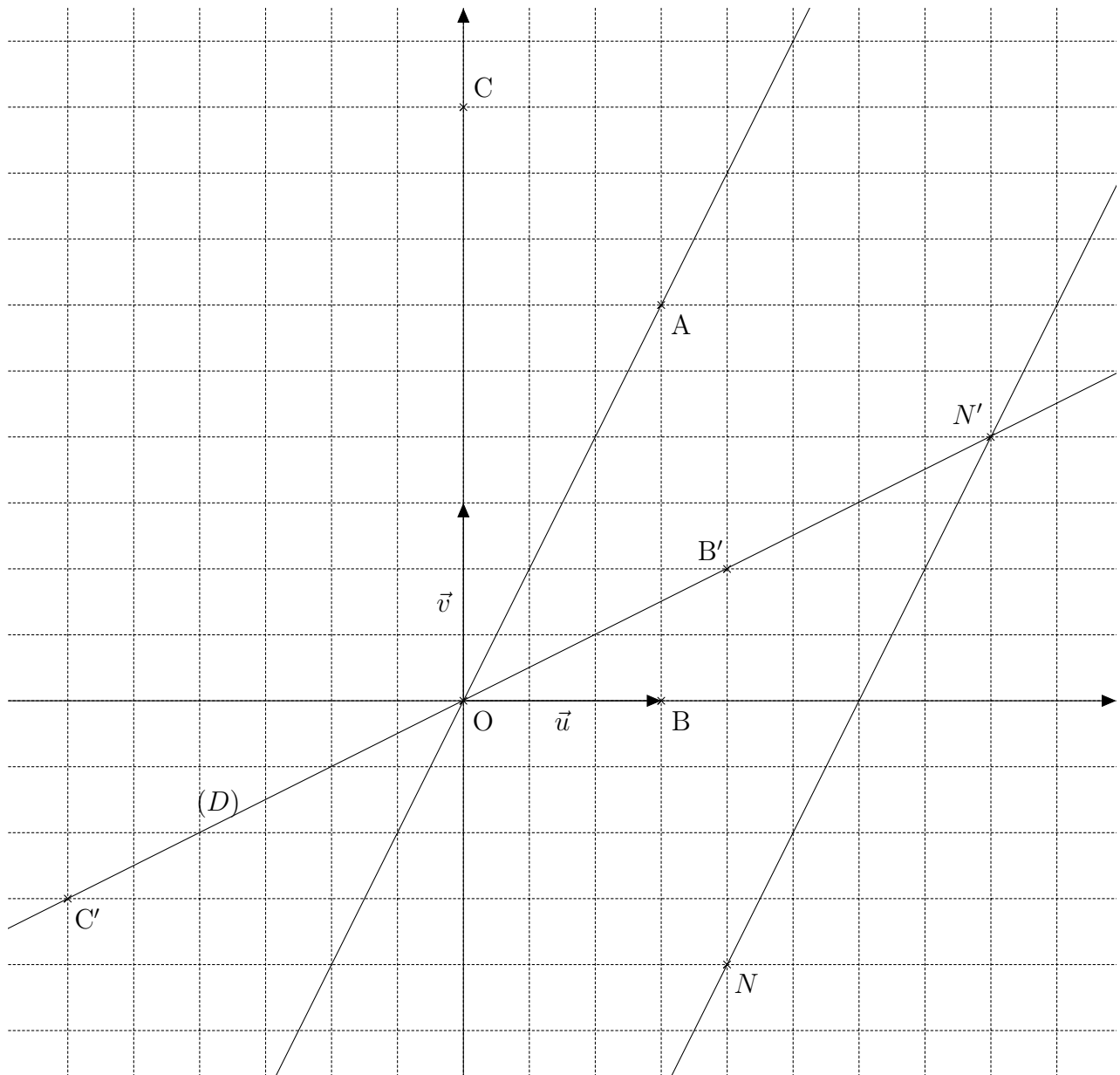
Correction du devoir à la maison n°2

$$1. \ z_{A'} = \frac{(3+4i)(1+2i) + 5(\overline{1+2i})}{6} = \frac{3+6i+4i-8+5(1-2i)}{6} = \frac{-5+10i+5-10i}{6}$$

soit $\boxed{z_{A'} = 0}$ i.e. $A' = O$.

$$z_{B'} = \frac{(3+4i) \times 1 + 5 \times \overline{1}}{6} = \frac{3+4i+5}{6} = \frac{8+4i}{6} \text{ soit } \boxed{z_{B'} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i}.$$

$$z_{C'} = \frac{(3+4i)(3i) + 5(\overline{3i})}{6} = \frac{9i-12+5(-3i)}{6} = \frac{-12-6i}{6} \text{ soit } \boxed{z_{C'} = -2-i}.$$



$$2. \ z' = \frac{(3+4i)(x+iy) + 5(\overline{x+iy})}{6} = \frac{3x+3iy+4ix-4y+5(x-iy)}{6} = \frac{8x-4y+i(4x-2y)}{6}$$

et donc, comme x et y sont réels, $\boxed{\operatorname{Re}(z') = \frac{4x-2y}{3}}$ et $\boxed{\operatorname{Im}(z') = \frac{2x-y}{3}}$.

3. Un point M si et seulement si

$$\begin{aligned} M' = M &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z') = \operatorname{Im}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-2y}{3} = x \\ \frac{2x-y}{3} = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y = 3x \\ 2x-y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ 2x-4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M invariants est bien la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

On constate que les trois points $A' = O$, B' et C' appartiennent à la droite (D) .

4. D'après la question 2., les coordonnées de M' sont $\left(\frac{4x-2y}{3}; \frac{2x-y}{3}\right)$ donc $\frac{1}{2}x_{M'} = \frac{1}{2} \times \frac{4x-2y}{3} = \frac{2x-y}{3} = y_{M'}$ donc M' appartient à la droite (D) .

5. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, en écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels, il vient :

$$\begin{aligned} z' - z &= \frac{4x-2y}{3} + i\frac{2x-y}{3} - (x + iy) = \frac{4x-2y-3x + i(2x-y-3y)}{3} \\ &= \frac{x-2y + i(2x-4y)}{3} = \frac{x-2y}{3}(1 + 2i) = \frac{x-2y}{3}z_A. \end{aligned}$$

Comme x et y sont réels, il existe un réel $k = \frac{x-2y}{3}$ tel que $z' - z = kz_A$ soit encore

$z \overrightarrow{MM'} = kz \overrightarrow{OA}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{OA}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires ce qui assure que si $M \neq M'$ alors les droites (MM') et (OA) sont parallèles.

b. Si le point N est sur (D) alors, d'après la question 3., le point N est invariant donc $N' = N$.

Sinon, d'après la question 4., la point N' appartient à (D) et d'après le résultat de la question précédente, (OA) et (NN') sont parallèles. Dès lors, N est le point d'intersection de la droite (D) et de la parallèle à (OA) passant par N .

Exercice 2. — Posons $Z = z^2$. Alors l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ s'écrit $Z^2 + Z + 1 = 0$. Le discriminant du trinôme $Z^2 + Z + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $Z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, z est solution de $z^4 + z^2 + 1 = 0$ si et seulement si $z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cherchons un complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels) tels que $z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Etant donné que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, un tel complexe vérifie $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2}$ et $2ab = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. En particulier, $a \neq 0$ et $b = -\frac{\sqrt{3}}{4a}$ donc $a^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4a}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ i.e $a^2 - \frac{3}{16a^2} + \frac{1}{2} = 0$. En multipliant par $a^2 \neq 0$, il vient $a^4 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{16} = 0$.

Posons alors $A = a^2$. A est solution de l'équation (E) : $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta' = \frac{1}{4} - 4 \times 1 \times \left(-\frac{3}{16}\right) = 1$. Ainsi, (E) admet deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2} = -\frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{1}{4}$.

Comme $A = a^2$, $A > 0$ donc $A = \frac{1}{4}$ i.e. $a = \frac{1}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$. Choisissons par exemple $a = \frac{1}{2}$. Alors, $b = -\frac{\sqrt{3}}{4a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Réciproquement, on vérifie que si $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $z^2 = \frac{1}{4} - 2i \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Notons $u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a montré que, pour tout complexe z ,

$$\begin{aligned} z^4 + z^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 = u^2 \text{ ou } z^2 = \bar{u}^2 \Leftrightarrow z^2 - u^2 = 0 \text{ ou } z^2 - \bar{u}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - u)(z + u) = 0 \text{ ou } (z - \bar{u})(z + \bar{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - u = 0 \text{ ou } z + u = 0 \text{ ou } z - \bar{u} = 0 \text{ ou } z + \bar{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = u \text{ ou } z = -u \text{ ou } z = \bar{u} \text{ ou } z = -\bar{u} \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ est $\left\{ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.