

Devoir à la maison n°2

A rendre le mercredi 7 octobre 2015

Exercice 1. — Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3 cm). Toutes les constructions sont à faire sur une même figure.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}.$$

On dira que M' est l'image de M .

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$. Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

2. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

3. On dit qu'un point M est invariant si $M' = M$.

Montrer que l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Tracer (D) . Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image. Montrer que M' appartient à la droite (D) .
5.
 - a. Démontrer que si $M' \neq M$ alors les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
 - b. Un point quelconque N étant donné, déduire des questions précédentes un procédé de construction de son image N' . (On étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
 - c. Effectuer la construction sur la figure pour un point N quelconque n'appartenant pas à (D) .

Exercice 2 (facultatif). — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z .