

Corrigé du devoir à la maison n°2

Exercice 1

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	8	2,6	0,85	0,28	0,09	0,03	0,01

b. L'algorithme proposé ne convient pas car le calcul « u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^i}$ » correspond à la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3^{n+1}}$. On peut le modifier soit en remplaçant « Pour i allant de 1 à n » par « Pour i allant de 0 à $n - 1$ » soit en remplaçant « u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^i}$ » par « u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^{i-1}}$ ».

2. a. En s'appuyant sur le tableau de la question 1.a, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Soit la proposition $P_n : \left\langle u_n \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^n} \right\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etant donné que $u_0 = 8$ et $\frac{15}{2} \times \frac{1}{3^0} = 7,5 \leq 8$, la proposition P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_k \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^k}$ donc, comme $\frac{1}{5} > 0$, $\frac{1}{5}u_k \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^k}$ i.e. $\frac{1}{5}u_k \geq \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^k}$. Dès lors, $\frac{1}{5}u_k + \frac{1}{3^k} \geq \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k}$ i.e. $u_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2} + 1\right) \times \frac{1}{3^k}$. Or, $\left(\frac{3}{2} + 1\right) \times \frac{1}{3^k} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3^k} = \frac{5 \times 3}{2} \times \frac{1}{3 \times 3^k} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^{k+1}}$. Ainsi, $u_{k+1} \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^{k+1}}$ donc P_{k+1} est vraie et on a démontré

par récurrence que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^n}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} - u_n = \frac{1}{3^n} - \frac{4}{5}u_n.$$

Mais, d'après la question précédent, $u_n \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^n}$ donc $-\frac{4}{5}u_n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^n} = -6 \times \frac{1}{3^n}$. Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{3^n} - 6 \times \frac{1}{3^n} = -\frac{5}{3^n} < 0$$

donc $\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}$.

d. Comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par $u_0 = 8$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{15}{2} \times \frac{1}{3^n} \geq 0$ donc (u_n) est minorée par 0. Ainsi, (u_n) est bornée.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} - \frac{3 \times 5}{2 \times 3^n \times 3} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} - \frac{5}{2 \times 3^n} = \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{2 \times 3^n}$$

et donc, en factorisant par $\frac{1}{5}$, il vient $v_{n+1} = \frac{1}{5} \left(u_n - \frac{15}{2 \times 3^n} \right)$ i.e. $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$.

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - \frac{15}{2 \times 3^0} =$

$$8 - \frac{15}{2} \text{ soit } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $v_0 = \frac{1}{2}$.$$

b. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$ soit $v_n = \frac{1}{2 \times 5^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - \frac{15}{2 \times 3^n} \text{ donc } u_n = v_n + \frac{15}{2 \times 3^n} \text{ i.e. } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2 \times 5^n} + \frac{15}{2 \times 3^n}}.$$

4. a. Voici un algorithme qui affiche la valeur de S_n en sortie pour une valeur de n donnée en entrée.

Entrée :	n		
Initialisation :	u prend la valeur 8 S prend la valeur 8		
Traitement :	Pour i allant de 0 à $n - 1$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^i}$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">S prend la valeur $S + u$</td> </tr> </table> Fin Pour	u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^i}$	S prend la valeur $S + u$
u prend la valeur $\frac{1}{5}u + \frac{1}{3^i}$			
S prend la valeur $S + u$			
Sortie :	Afficher S		

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2 \times 5^i} + \frac{15}{2 \times 3^i} \right) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2 \times 5^i} + \sum_{i=0}^n \frac{15}{2 \times 3^i} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^i + \sum_{i=0}^n \frac{15}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^i.$$

On reconnaît dans chacune de ces deux sommes la somme des termes successifs d'une suite géométrique donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{15}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) + \frac{15}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8 \times 5^n} + \frac{45}{4} - \frac{15}{4 \times 3^n} \end{aligned}$$

soit finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{95}{8} - \frac{1}{8 \times 5^n} - \frac{15}{4 \times 3^n}}.$

c. On a vu en question 2.d. que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc S_n est une somme de réels positifs, c'est donc un réel positif. Ainsi, (S_n) est minorée par 0.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{8 \times 5^n} > 0$ et $\frac{15}{4 \times 3^n} > 0$ donc $S_n < \frac{95}{8}$. Ainsi, (S_n) est majorée.

On conclut que $\boxed{(S_n) \text{ est bornée}}.$

Exercice 2. — Considérons la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1 - x^2$. Alors, f est une fonction polynôme du second degré donc f est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = -2x \leq 0$. Ainsi, f est décroissante sur $[0; 1]$.

Montrons par récurrence que (v_n) est décroissante.

Soit la proposition $P_n : \langle 0 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$v_0 = u_0 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = u_2 = \frac{7}{16}$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $0 \leq v_{k+1} \leq v_k \leq 1$ i.e. $0 \leq u_{2k+2} \leq u_{2k} \leq 1$. Comme f est décroissante sur $[0; 1]$, on en déduit que $f(0) \geq f(u_{2k+2}) \geq f(u_{2k}) \geq f(1)$ i.e. $1 \geq u_{2k+3} \geq u_{2k+1} \geq 0$. En appliquant à nouveau f , il vient, de la même façon, $f(1) \leq f(u_{2k+3}) \leq f(u_{2k+1}) \leq f(0)$ i.e. $0 \leq u_{2k+4} \leq u_{2k+2} \leq 1$ soit encore $0 \leq v_{k+2} \leq v_{k+1} \leq 1$.

Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

On montre rigoureusement de même que (w_n) est croissante.

On conclut que (u_n) n'est pas monotone sinon les deux suites (v_n) et (w_n) auraient le même sens de variation.