Devoir à la maison n°2

A rendre le mardi 30 septembre 2014

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{1}{3^n}$.

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	8						

b. On souhaite écrire un algorithme qui affiche la valeur de u_n en sortie pour une valeur de n donnée en entrée. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n
Initialisation :	u prend la valeur 8
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	u prend la valeur $\dfrac{1}{5}u + \dfrac{1}{3^i}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

Expliquer pourquoi cet algorithme ne convient pas et proposer une modification qui permette d'obtenir l'affichage voulu.

2. **a.** En s'appuyant sur le tableau de la question 1.a, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq \dfrac{15}{2} \times \dfrac{1}{3^n}$.

c. En déduire une démonstration de la conjecture formulée en question 2.a.

d. La suite (u_n) est-elle bornée ? (Justifier.)

3. On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \dfrac{15}{2 \times 3^n}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2 \times 5^n} + \dfrac{15}{2 \times 3^n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

a. En s'inspirant de l'algorithme proposé en question 1.b, écrire un algorithme qui affiche la valeur de S_n en sortie pour une valeur de n donnée en entrée.

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n en fonction de n.

c. Démontrer que la suite (S_n) est bornée.

Exercice 2 (facultatif). — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$. On définit de plus les suites (v_n) et (w_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Etudier les variations des suites (u_n), (v_n) et (w_n).