Devoir à la maison n°2

A rendre le mercredi 1er octobre 2013

Exercice 1. — On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 4n + 6}$.

1. Justifier que (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On note f la fonction définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 6$.
Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

3. Déduire de la question précédente que (u_n) est bornée et qu'elle est monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 2. — On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

b. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ? (On justifiera ses réponses avec soin.)

c. Etudier les variations de (u_n).

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée          :  N est un entier naturel
Initialisation  :  Donner à U la valeur 1
                   Donner à S la valeur 1
                   Donner à K la valeur 0
Traitement      :  Tant que K < N
                     | Donner à U la valeur 2U − K + 1
                     | Donner à S la valeur S + U
                     | Donner à K la valeur K + 1
                   Fin Tant que
Sortie          :  Afficher S
```

a. Faire fonctionner l'algorithme pour $N = 4$. On détaillera toutes les étapes en présentant les résultats sous forme d'un tableau.

b. Que représente, pour la suite (u_n), le nombre S obtenu en sortie lorsqu'on entre un entier naturel n. (On ne demande pas de justification.)

3. On définit la suite (v_n) par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de l'entier n entré dans l'algorithme de la question 2, le nombre S obtenu en sortie.

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 3. — Démontrer que la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k}$ est bornée.

Exercice 4. — On considère des réels a, b, c et d tels que $c \neq 0$. On définit la suite (u_n) par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.

1. Démontrer que si $ad - bc = 0$ alors la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
On suppose désormais que $ad - bc \neq 0$.

2. Démontrer que, pour tout réel x, l'équation (E) : $x = \frac{ax + b}{cx + d}$ est équivalente à $P(x) = 0$ où $P(x)$ est le trinôme $P(x) = cx^2 + (d - a)x - b$.
On note Δ le discriminant de ce trinôme.

3. Démontrer que si x est solution de (E) alors $\frac{dx - b}{a - cx} = x$.

4. On suppose que $\Delta = 0$ et on note x_0 l'unique racine de $P(x)$.

- **a.** Que peut-on dire de (u_n) si $u_0 = x_0$?
- **b.** Exprimer x_0 en fonction de a, c et d.
- **c.** On suppose que $u_0 \neq x_0$. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - x_0}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis qu'elle est arithmétique de raison $r = \frac{2c}{a + d}$. (On pourra commencer par montrer que $v_{n+1} = \frac{cu_n + d}{(a - cx_0)(u_n - x_0)}$ puis calculer $v_{n+1} - v_n$.)

5. On suppose que $\Delta > 0$ et on note x_1 et x_2 les deux racines réelles de $P(x)$.

- **a.** Que peut-on dire de (u_n) si $u_0 \in \{x_1, x_2\}$?
- **b.** On suppose que $u_0 \notin \{x_1, x_2\}$. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n - x_1}{u_n - x_2}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis qu'elle est géométrique de raison $q = \frac{a - cx_1}{a - cx_2}$.