Devoir à la maison n°1

À rendre le jeudi 16 septembre 2021

Exercice 1. — Soit a un réel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n}{u_n + a}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrer que (u_n) est décroissante.

3. **a.** Calculer, en simplifiant au maximum, u_1, u_2 et u_3 en fonction de a et conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de a et de n.

b. Démontrer la conjecture précédente en raisonnant par récurrence.

4. On propose une autre méthode pour retrouver le résultat de la question précédente. Dans cette question, on n'utilisera pas les résultats de la question **3.**.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{a}{u_n}$.

a. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction de a et de n.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Utiliser la suite (t_n) pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{(n+1)(n+2a)}{2a}.$$

Exercice 2 (facultatif)

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2}\right).$$