Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 16 septembre 2020

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{nu_n}{n+2} + 9.$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = u_n - 3n - 6$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n > 0$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \dfrac{1}{w_n}$ et $s_n = t_{n+1} - t_n$.

a. Calculer t_1 puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} t_n$.

b. Calculer t_2, t_3, t_4 et t_5 et puis s_1, s_2, s_3 et s_4.

c. À partir des résultats précédents, conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de s_n en fonction de n et en déduire qu'on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

d. Montrer, par récurrence, la conjecture précédente portant sur (t_n) et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j$ i.e. $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

a. Calculer S_1, S_2 et S_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2 (facultatif). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3n}{2n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n-1}{n}$.

Pistes de réflexion pour le grand oral. On dit qu'un ensemble A admet un plus petit élément s'il existe $a \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $a \leqslant x$. On considère la proposition suivante appelée « axiome du bon ordre sur $\mathbb{N}$ » :

tout partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démontrer que cet axiome est équivalent à l'axiome du principe du raisonnement par récurrence.