Devoir à la maison n°1

À rendre le lundi 18 septembre 2017

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+2)^2} u_n \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 2. — On considère deux réels a et b. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On suppose que $a = 1$.

a. Quelle est la nature de (u_n) ?

b. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n et de b.

2. On suppose que $a \neq 1$.

a. Justifier que l'équation $ax + b = x$ d'inconnue x admet une unique solution c dans $\mathbb{R}$.

b. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n, de a et de c.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n, de a et de c.

Exercice 3 (facultatif). — Si p est un entier naturel non nul, on dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est $p-$périodique si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

1. Que peut-on dire d'une suite $1-$périodique ?

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite $p-$périodique. Démontrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, (u_n) est $mp-$périodique.

3. Donner un exemple explicite de suite $2-$périodique et non constante.

4. On considère la suite (t_n) telle que $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et (t_n) est $3-$périodique.

a. Déterminer t_3, t_4, t_5.

b. Calculer t_{2017}.

c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de t_n en fonction de n.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite (u_n) positive et $p-$périodique. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. Démontrer qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n-p)M \leqslant pS_n \leqslant (n+p)M.$$

(On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $j \in \mathbb{N}$ tel que $jp \leqslant n < (j+1)p$.)