Correction du devoir à la maison n°1

Exercice 1. — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. On a $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 2$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = 5$, $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 10$, $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 1 = 17$ et $u_5 = u_4 + 2 \times 4 + 1 = 26$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 \geqslant 0$ car $n \geqslant 0$. Dès lors, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

3. Au vu des premières valeurs de (u_n), on peut conjecturer que $u_n = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons cette conjecture par récurrence.
Soit la proposition P_n : ´ $u_n = n^2 + 1$ ˇ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$0^2 + 1 = 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
On veut montrer que P_{k+1} est vrai i.e. que $u_{k+1} = (k+1)^2 + 1$. Or,

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 1 = (k^2 + 1) + 2k + 1 = (k^2 + 2k + 1) + 1 = (k+1)^2 + 1$$

donc P_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 1}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 1 - u_n = 2n + 1$. On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

b. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = n \times \frac{1 + 2(n-1) + 1}{2}$ i.e. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = n^2}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) \\
&= -u_0 + \underbrace{u_1 - u_1}_{=0} + \underbrace{u_2 - u_2}_{=0} + \cdots + \underbrace{u_{n-1} - u_{n-1}}_{=0} + u_n \\
&= -u_0 + u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente, $-u_0 + u_n = n^2$ i.e. $u_n = n^2 + u_0 = n^2 + 1$. De plus, cette égalité reste vraie pour $n = 0$ car $0^2 + 1 = 1 = u_0$. On a donc (re)démontré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 1}$.

Exercice 2

1. La réponse est « oui ». Considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n + 2 - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

donc (u_n) est strictement croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant 0$ donc (u_n) est majorée par 0.

2. La réponse est « non ». Soit (u_n) une suite d'entiers naturels strictement croissante. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

Soit le proposition P_n : « $u_n \geqslant n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme u_0 est un entier naturel, $u_0 \geqslant 0$ donc P_0 est vraie.

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant k$.

Alors, comme (u_n) est strictement croissante, $u_{k+1} > u_k$. Or, u_k et u_{k+1} sont des entiers donc $u_{k+1} \geqslant u_k + 1$. Par hypothèse de récurrence, $u_k \geqslant k$ donc $u_{k+1} \geqslant k+1$. Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

Soit A un réel. Alors, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > A$ et donc $u_n > A$. Ainsi, A ne majore pas (u_n). Ceci étant vraie pour tout $A \in \mathbb{R}$, on en déduit que (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 3. — La suite de Fibonacci

1. Par définition, $F_2 = F_1 + F_0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$ et $F_4 = F_3 + F_2 = 3$.

2. Soit la proposition P_n : « $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ sont des entier naturels, P_0 est vraie.

   Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, F_k et F_{k+1} sont des entiers naturels. On en déduit que $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ est un entier naturel. Ainsi, F_{k+1} et F_{k+2} sont des entiers naturels sont P_{k+1} est vraie.

   On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}}$.

3. L'équation $r^2 = r+1$ est équivalente à $r^2 - r - 1 = 0$. Le discriminant du trinôme $r^2 - r - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc l'équation $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont $r_1 \dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } r^2 = r+1 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

4. Supposons qu'il existe deux réels A et B tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Alors, en particulier, $0 = F_0 = Ar_1^0 + Br_2^0 = A + B$ et $1 = F_0 1 = Ar_1^1 + Br_2^1 = Ar_1 + Br_2$. La première équation implique que $B = -A$ et la deuxième que $1 = A(r_1 - r_2) = A\sqrt{5}$ donc $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   Ainsi, si les constantes A et B existent, elles valent respectivement $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   Soit la proposition Q_n : « $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_1^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_2^n$ et $F_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_1^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_2^{n+1}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   D'après ce qui précède, Q_0 est vraie.

   Supposons que Q_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_1^k - \dfrac{1}{\sqrt{5}} r_2^k$ et

$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k+1}$ donc

$$\begin{aligned}
F_{k+2} = F_{k+1} + F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k}(r_1+1) - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k}(r_2+1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k}(r_1^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k}(r_2^2) \quad \text{(car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 = r+1\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k+1}$ et $F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{k+2}$ donc P_{k+2} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}r_1^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}r_2^{n}}$.

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = F_n$$

donc, en multipliant par 2^n,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^n = 2^n F_n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}} = 2^n F_n.$$

Mais, d'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$ donc $2^n F_n \in \mathbb{N}$. On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}} \text{ est un entier naturel}}$.