Devoir à la maison n°1

À rendre le jeudi 15 septembre 2016

Exercice 1. — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. Formuler une conjecture quant à l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

4. On se propose de retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode. Dans cette question, on n'utilisera donc pas le résultat de la question 3.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Justifier que (v_n) est une suite arithmétique.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ en fonction de n.

c. En déduire l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Une suite de réels strictement croissante peut-elle être majorée ?

2. Une suite d'entiers naturels strictement croissante peut-elle être majorée ?

Exercice 3 (facultatif). — La suite de Fibonacci

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer F_2, F_3 et F_4.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.

(*Indication* : considérer la proposition P_n : « $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.)

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 = r + 1$. On notera r_1 et r_2 les deux solutions réelles de cette équation, avec $r_1 > r_2$.

4. Démontrer qu'il existe deux réels A et B, que l'on déterminera explicitement, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

5. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}}$ est un entier naturel.