Correction du devoir à la maison n°1

Exercice 1

1. $u_1 = u_{0+1} = (0+1)^2 - u_0 = 1$, $u_2 = u_{1+1} = (1+1)^2 - u_1 = 3$ et $u_3 = u_{2+1} = (2+1)^2 - u_2 = 6$.

2. Soit la proposition P_n : « $n^2 \leq 2u_n \leq (n+1)^2$ ».
$u_0 = 0$ donc $0^2 \leq u_0 \leq (0+1)^2$ i.e. P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
On va montrer que P_{k+1} est vraie i.e. que $(k+1)^2 \leq 2u_{k+1} \leq (k+2)^2$.
Comme P_k est vraie, $k^2 \leq 2u_k \leq (k+1)^2$ donc $-(k+1)^2 \leq -2u_k \leq -k^2$ et ainsi $2(k+1)^2 - (k+1)^2 \leq 2(k+1)^2 - 2u_k \leq 2(k+1)^2 - k^2$. Or, $2(k+1)^2 - 2u_k = 2[(k+1)^2 - u_k] = 2u_{k+1}$ donc on aboutit à $(k+1)^2 \leq 2u_{k+1} \leq 2(k^2+2k+1) - k^2 = k^2+4k+2$. Or, $k^2+4k+2 \leq k^2+4k+4 = (k+2)^2$ donc finalement $(k+1)^2 \leq 2u_{k+1} \leq (k+2)^2$. Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ n^2 \leq 2u_n \leq (n+1)^2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n^2}{2} \geq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } 0}$. Supposons que (u_n) soit majorée. Alors, il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Soit N un entier tel que $N > \sqrt{2M}$. On a alors $u_N \geq \frac{N^2}{2}$. Or, par stricte croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $N^2 > \sqrt{2M}^2 = 2M$ donc $u_n > \frac{2M}{2} = M$. On aboutit à une contradiction donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas majorée}}$. Par conséquent, $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas bornée}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - u_n - u_n = (n+1)^2 - 2u_n$. Or, d'après la question 1, $2u_n \geq (n+1)^2$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. On conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

5. a. Soit la proposition Q_n : « $u_{n+1} = u_n + n + 1$ ».
$u_{0+1} = u_1 = 1$ et $u_0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ donc P_0 est vraie.
Supposons que Q_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ i.e. que $u_{k+1} = u_k + k + 1$.
On va montrer que Q_{k+1} est vraie i.e. que $u_{k+2} = u_{k+1} + (k+1) + 1 = u_{k+1} + k + 2$.
Alors,

$$u_{k+2} = (k+2)^2 - u_{k+1} = (k+2)^2 - (u_k + k + 1) = k^2 + 4k + 4 - u_k - k - 1 = k^2 + 3k + 3 - u_k.$$

Mais, par définition, $u_{k+1} = (k+1)^2 - u_k$ donc $u_k = (k+1)^2 - u_{k+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= k^2 + 3k + 3 - [(k+1)^2 - u_{k+1}] = k^2 + 3k + 3 - (k+1)^2 + u_{k+1} \\ &= k^2 + 3k + 3 - k^2 - 2k - 1 + u_{k+1} = u_{k+1} + k + 2. \end{aligned}$$

Ainsi, Q_{k+2} est vraie et on a montré par récurrence que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + n + 1}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = (n+1)^2 - u_n$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$ donc $(n+1)^2 - u_n = u_n + n + 1$. Ainsi, $(n+1)^2 - (n+1) = 2u_n$ donc $u_n = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On a donc démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exercice 2. — Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A_nA_{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_n = \sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2} = \sqrt{(x_n-y_n-x_n)^2+(x_n+y_n-y_n)^2} = \sqrt{(-y_n)^2+(x_n)^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{x_n^2+y_n^2}}.$$

Montrons que la suite (u_n) est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{x_{n+1}^2+y_{n+1}^2} = \sqrt{(x_n-y_n)^2+(x_n+y_n)^2} = \sqrt{x_n^2-2x_ny_n+y_n^2+x_n^2+2x_ny_n+y_n^2} \\ &= \sqrt{2(x_n^2+y_n^2)} = \sqrt{2}\sqrt{x_n^2+y_n^2} \end{aligned}$$

i.e. $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \sqrt{2}}$.

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\cdots A_n$ est

$$\ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\frac{1-\sqrt{2}^n}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{1^2+0^2}\frac{1-\sqrt{2}^n}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2}^n)(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}^n-\sqrt{2}^{n+1}}{1-2}$$

i.e. finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_n = \sqrt{2}^{n+1}+\sqrt{2}^n-\sqrt{2}-1}.$$

Exercice 3 (facultatif)

1. Soit k un entier. Alors l'équation d'inconnue x

$$x+\frac{1}{x} = k$$

équivaut, pour tout $x \neq 0$, à l'équation

$$x^2-kx+1=0.$$

Le discriminant du trinôme x^2-kx+1 est $\Delta = (-k)^2-4\times 1\times 1 = k^2-4$. Ainsi, si $|k| \geq 2$, $\Delta \geq 0$ et l'équation $x^2-kx+1=0$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

En choisissant, par exemple, $k=3$, on peut donc affirmer que $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ est solution de $x^2-3x+1=0$ et donc de $x+\dfrac{1}{x}=3$. Ainsi, l'exemple $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ montre que $x+\dfrac{1}{x}$ peut être entier sans que x ne le soit (puisque $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$).

2. Soit la proposition P_n : « pour tout entier $j \leq n$, $x^j+\dfrac{1}{x^j}$ est un nombre entier ».

Etant donné que $x^0+\dfrac{1}{x^0}=2$, la proposition P_0 est vraie. De plus, par hypothèse, $x+\dfrac{1}{x}$ est entier donc P_1 est vraie.

Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ i.e. que, pour tout entier $j \leq k$, $x^j + \frac{1}{x^j}$ soit entier.
Montrons que P_{k+1} est vraie i.e. que, pour tout entier $j \leq k+1$, $x^j + \frac{1}{x^j}$ est entier.
Comme P_k est vraie, il suffit en fait de montrer que $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ est entier. Or,

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

donc

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Or, comme P_k est vraie et comme $k \geq 1$, $x^k + \dfrac{1}{x^k}$ et $x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}}$ sont des entiers. De plus, par hypothèse, $x + \dfrac{1}{x}$ est entier. Par produit et différence d'entiers, on en déduit que $x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}}$ est un entier.
Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}}.$$

Remarque. — On a ici utilisé ce qu'on appelle une récurrence forte. Au lieu de supposer que la proposition à montrer est vraie au rang k, on suppose qu'elle est vraie à tous les rangs jusqu'au rang k. Cependant, l'étape d'hérédité n'est pas plus compliquée car il ne reste toujours qu'à montrer que la proposition est vraie au rang $k+1$.