Devoir à la maison n°1

A rendre le mardi 17 septembre 2014

Exercice 1. — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 2. — Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
On définit la suite (t_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

2. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} - t_n = n+1 \qquad \text{et} \qquad t_{n+1} + t_n = (n+1)^2.$$

b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^3 = t_k^2 - t_{k-1}^2.$$

c. En utilisant uniquement le résultat précédent, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 3 (facultatif). — On considère une partie A de $\mathbb{N}$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- Propriété 1 : $1 \in A$;
- Propriété 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ alors $2n \in A$;
- Propriété 3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n+1 \in A$ alors $n \in A$.

1. On considère la proposition P_n : « pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $j \leq n$ alors $j \in A$ ».
Démontrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que peut-on en conclure ?