T[le]S2 septembre 2013

Devoir à la maison n°1

A rendre le mardi 17 septembre 2013

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 2. — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1$.

On considère, par ailleurs, la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

2. Donner l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 3. — On rappelle qu'une propriété P_n est héréditaire sur $\mathbb{N}$ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie. Donner un exemple de propriété P_n héréditaire sur $\mathbb{N}$ telle que P_n soit fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. — On dit qu'un ensemble A admet un plus petit élément s'il existe $a \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $a \leq x$. On considère la propriété suivante appelée « propriété du bon ordre sur $\mathbb{N}$ » :

tout partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démontrer cette propriété en raisonnant sur le nombre d'éléments de la partie de $\mathbb{N}$. (On pourra donc considérer la propriété P_n : « si une partie de $\mathbb{N}$ possède n éléments alors elle admet un plus petit élément » pour $n \in \mathbb{N}^*$.)

T[le]S2 septembre 2013

Devoir à la maison n°1

A rendre le mardi 17 septembre 2013

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 2. — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1$.

On considère, par ailleurs, la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

2. Donner l'expression de v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin (facultatif)

Exercice 3. — On rappelle qu'une propriété P_n est héréditaire sur $\mathbb{N}$ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie. Donner un exemple de propriété P_n héréditaire sur $\mathbb{N}$ telle que P_n soit fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. — On dit qu'un ensemble A admet un plus petit élément s'il existe $a \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $a \leq x$. On considère la propriété suivante appelée « propriété du bon ordre sur $\mathbb{N}$ » :

tout partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Démontrer cette propriété en raisonnant sur le nombre d'éléments de la partie de $\mathbb{N}$. (On pourra donc considérer la propriété P_n : « si une partie de $\mathbb{N}$ possède n éléments alors elle admet un plus petit élément » pour $n \in \mathbb{N}^*$.)