⧫ Chapitre 9. – Fonction logarithme népérien

I. — Logarithme népérien d'un nombre

1) Définition

Théorème et définition 1

Soit $c \in]0\,;+\infty[$. Il existe un unique réel α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = c$. Le nombre α est appelé le logarithme népérien de c et on le note $\alpha = \ln(c)$.

Propriété 2

On a l'équivalence fondamentale suivante :

$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{y}.$$

Corollaire 3

1. $\ln(1) = 0$;

2. $\ln(e) = 1$;

3. Pour tout réel $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$;

4. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^{b}) = b$.

2) Équation fonctionnelle caractéristique

Théorème 4

Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Corollaire 5

1. Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

2. Soit a_1, a_2, ..., a_n des réels strictement positifs. Alors,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

3. Pour tout entier relatif n et tout réel strictement positif a,

$$\ln\left(a^{n}\right) = n\ln(a).$$

Exemple 6. Simplifier l'écriture des nombres suivants.

1. $A = \ln(125) - 2\ln(10) + \ln(4)$
2. $B = \ln(2-\sqrt{3}) + \ln(2+\sqrt{3})$
3. $C = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

II. — La fonction ln

1) Définition, variation et dérivée

Définition 7

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui, à tout nombre strictement positif x, associe son logarithme népérien. Ainsi,

$$\ln : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Propriété 8

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Corollaire 9

Pour tous réels strictement positifs a et b,

1) $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ 2) $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ 3) $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$.

Exemple 10. — Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geqslant 0$;
2. $\ln(x) = \ln(x^2 - 2)$;
3. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 6 < 0$.

Théorème 11

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Corollaire 12

Soit u une fonction définie et dérivable sur un ensemble E et telle que, pour tout $x \in E$, $u(x) > 0$. Alors, la fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur E et, pour tout $x \in E$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple 13. — Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

2) limites

Corollaire 14

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1.$$

Théorème 15

$$\lim_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty.$$

Exemple 16. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(x)}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x - x\ln(x)$.

Théorème 17. — Croissances comparées

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}x^n\ln(x)=0.$$

Exemple 18. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\ln(x)}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x-\ln(x)$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\ln(x^2)-2x$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$.

3) Tableau de variation et courbe représentative

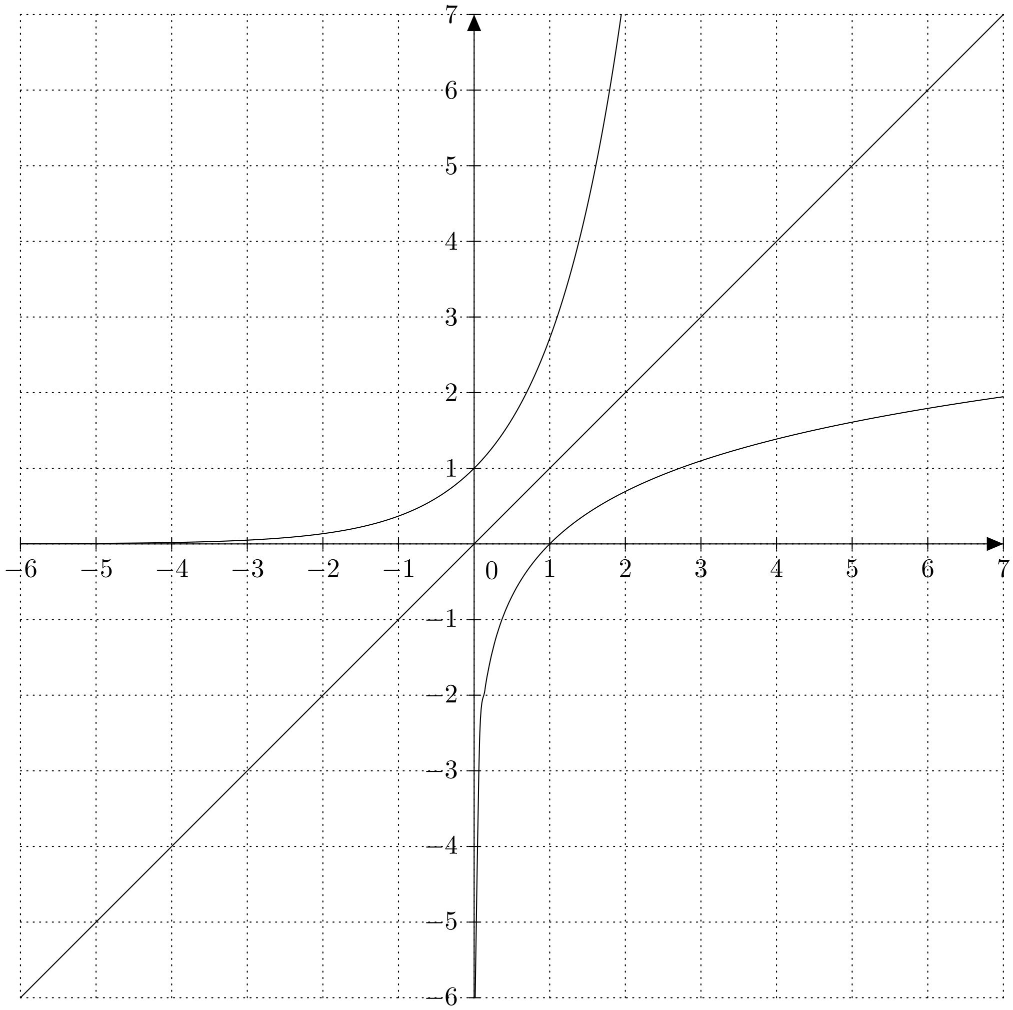
Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
Variations de ln	$-\infty$	0	$+\infty$

Courbes

Propriété 19

Les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y=x$. Cela traduit l'équivalence fondamentale de la propriété 2. On dit que les fonction exp et ln sont des bijections réciproques.



4) Logarithme décimal

On définit le logarithme décimal d'un nombre réel $x > 0$ par

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Les propriétés calculatoires du logarithme décimal sont essentiellement les mêmes que celui du logarithme népérien en remplaçant e par 10. Ainsi, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$. De plus, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a) \qquad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^n) = n\log(a).$$

On peut également définir la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ qui possède des propriétés essentiellement identiques à celle de la fonction ln (exceptée la dérivée qui est $x \longmapsto \frac{1}{\ln(10)x}$). Cette fonction est très présente en physique-chimie (calcul de pH, d'intensité sonore...)