⧫ Chapitre 7 : Produit scalaire dans l'espace

I. — Définition

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{v}$ et $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points A, B et C. Alors, on définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, comme le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Autrement dit, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos(\widehat{BAC})$ sinon.

Remarque 2. Le calcul du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépendant que des normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, la définition précédente est indépendante des points A, B et C choisis.

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramène essentiellement au produit scalaire de deux vecteurs du plan donc il possède les mêmes propriétés que ce dernier.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace, k un réel et A, B, et C des points de l'espace.

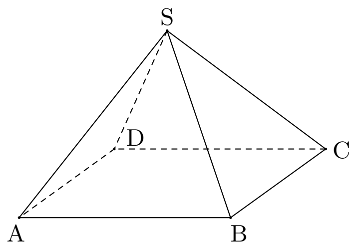
- Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

1. Le produit scalaire est bilinéaire : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (i.e. le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Exemple 4. On considère une pyramide SABCD à base carrée ABCD et dont toutes les arêtes ont la même longueur a. Déterminer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$; b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$; c) $\overrightarrow{\mathrm{SA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}}$;
d) $\overrightarrow{\mathrm{SC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$; e) $\overrightarrow{\mathrm{SA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SC}}$; f) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$.



Propriété 5

Soit A, B, C et D des points de l'espace tels que D $\notin$ (AB). Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) dans le plan (ABD). Alors, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}$.

Propriété 6. Identités remarquables et identités de polarisation

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On a les identités remarquables suivantes :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 ; \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\ \vec{u} \cdot v + \|\vec{v}\|^2 ; \quad (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 .$$

On a les identités de polarisation suivantes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) ; \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

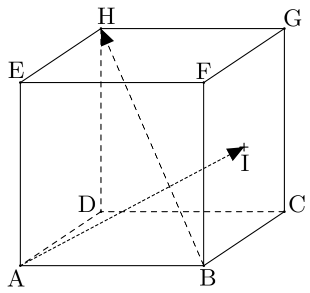
Exemple 7. Soit ABC un triangle tel que AB = 3, BC = 4 et AC = 6, déterminer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Remarque 8. La première (ou la deuxième) identité remarquable permet d'établir la formule d'Al-Kashi : dans un triangle ABC quelconque,

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{BA} \times \mathrm{BC} \times \cos(\widehat{ABC}).$$

II. — Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de vecteurs et de droites



Définition 9

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemple 10. On considère un cube ABCDEFGH et on note I le centre du carré BCGF. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.

Définition 11

Soit Δ et Δ' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$. Alors, Δ et Δ' sont orthogonales si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux. On note alors $\Delta \perp \Delta'$.

Remarque 12.

1. Cette définition est indépendante des vecteurs directeurs choisis car, pour tous réels non nuls k et ℓ, $(k\vec{u}) \cdot (\ell\vec{v}) = (k\ell)(\vec{u} \cdot \vec{v})$ donc, comme $k\ell \neq 0$, $(k\vec{u}) \cdot (\ell\vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. D'un point de vue purement géométrique, dire que deux droites de l'espace (AB) et (CD) sont orthogonales signifie que la parallèle à (CD) passant par A est perpendiculaire à (AB). Ainsi, deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse (elle n'est vraie que si les droites sont, de plus, coplanaires).

Exemple 13. Si on reprend le cube ci-dessus, les droites (AB) et (CG) sont orthogonales tout comme les droites (AI) et (BH).

Définition 14

Soit Δ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan dirigé par des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On dit que Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$. Dans ce cas, on note $\Delta \perp \mathcal{P}$.

Remarque 15. Comme précédemment, cette définition ne dépend pas du choix des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exemple 16. Si on reprend le cube ci-dessus, (BF) est orthogonale au plan (ABC) car $\overrightarrow{BF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

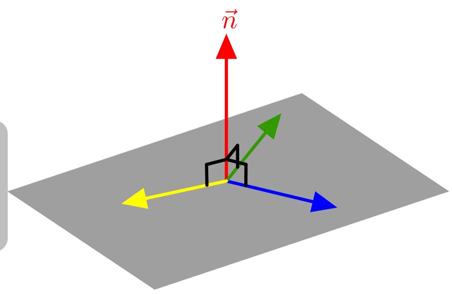
Propriété 17

Soit Δ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.
3. Δ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$.
4. Δ est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Exemple 18. On reprend le cube ci-dessus. Montrer que la droite (AB) est orthogonale à la droite (FC).

2) Vecteur normal à un plan



Définition 19

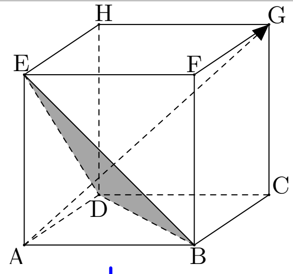
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit qu'un vecteur <u>non nul</u> $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

Remarque 20. Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ revient à dire que $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Propriété 21

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs d'une base de $\mathcal{P}$.

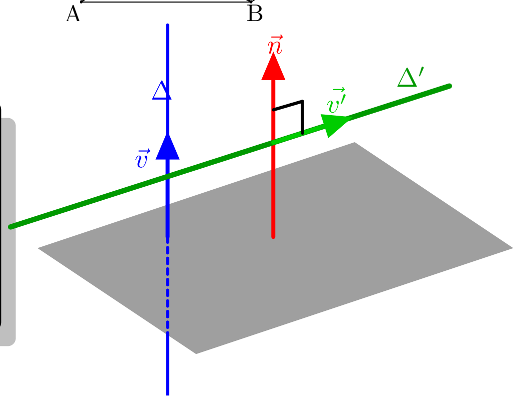
Exemple 22. On considère un cube ABCDEFGH. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (BDE).

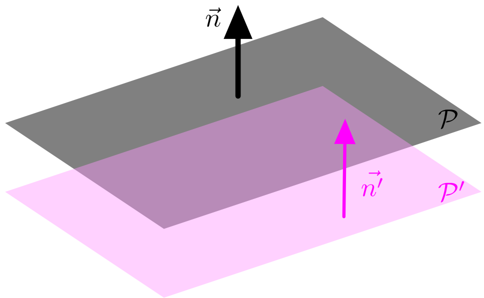


Propriété 23

Soit $\mathcal{P}$ un plan et Δ une droite de l'espace. On suppose que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ. Alors,

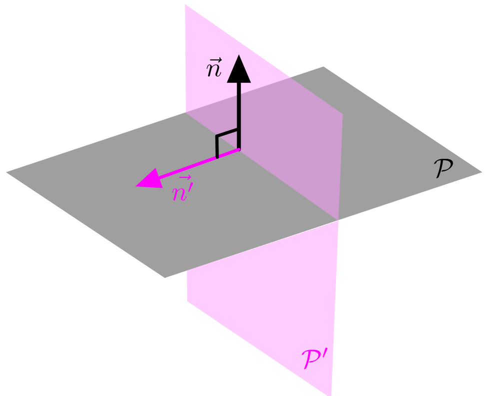
1. Δ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}$;
2. Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$.





Propriété 24

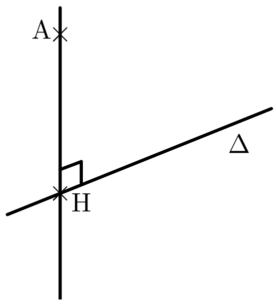
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Alors, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.



Définition 25

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.

3) Projection orthogonale et distance dans l'espace



Propriété 26

Soit Δ une droite de l'espace et A un point de l'espace n'appartenant pas à Δ. Il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale à Δ. Cette droite coupe la droite Δ en un point H appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Remarque 27.

1. Si le point A appartient à la droite Δ, on convient que $\mathrm{H} = \mathrm{A}$.
2. Si le point A n'appartient pas à la droite Δ alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite Δ et H n'est autre que le projeté orthogonal de A sur Δ dans $\mathcal{P}$.

Propriété 28

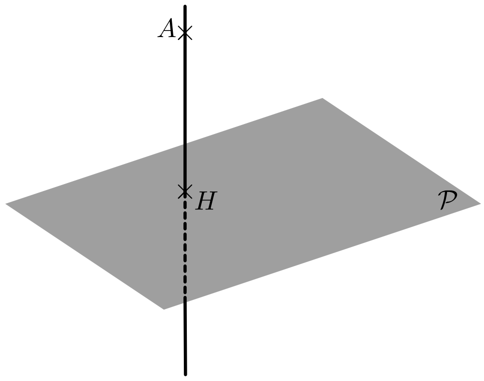
Soit A un point, Δ une droite de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur Δ. Alors, pour tout point M de Δ, A$M \geqslant$ AH.

On dit que AH est la distance de A à la droite Δ.

Exemple 29. On reprend la pyramide de l'exemple 4. Déterminer la distance de S à la droite (AB).

Propriété 30

Soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une droite et une seule passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Cette droite coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point H appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

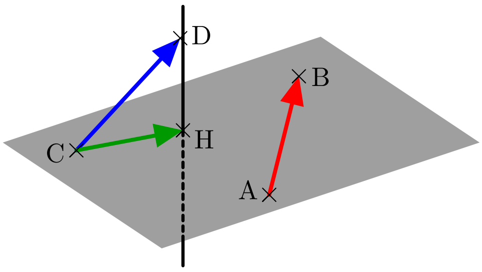


Remarque 31. Si $A \in \mathcal{P}$ alors H = A i.e. A est son propre projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

Propriété 32

Soit A un point, $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, pour tout point M de $\mathcal{P}$, A$M \geqslant$ AH.
On dit que AH est la distance de A au plan $\mathcal{P}$.

Exemple 33. On reprend la pyramide de l'exemple 4. Déterminer la distance de S au plan (ABC).



Propriété 34

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Alors,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}.$$

Remarque 35. L'intérêt de la proposition précédente réside dans le fait que H appartient au plan (ABC) donc les points A, B, C et H sont coplanaires.

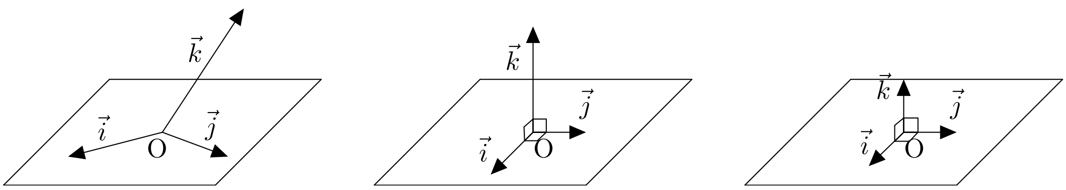
III. — Repères de l'espace

1) Définition

Définition 36

Un repère de l'espace est la donnée d'un point O appelé *origine* du repère et d'une base de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un tel repère est noté $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On dit que le repère est *orthogonal* si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, ce qui revient à dire que les droites $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$, $(\mathrm{O}\,;\vec{j})$ et $(\mathrm{O}\,;\vec{k})$ sont deux à deux perpendiculaires.
On dit que le repère est *orthonormé* ou *orthonormal* s'il est orthogonal et si $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

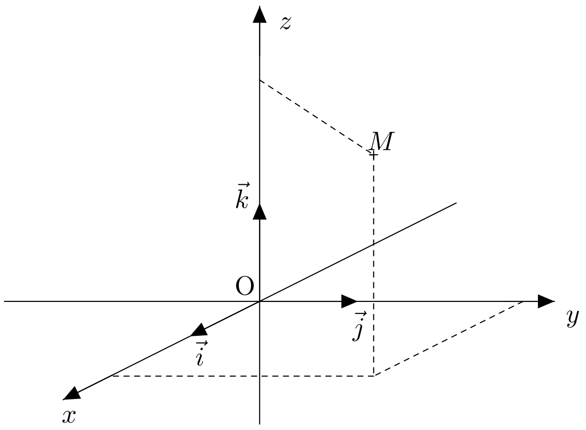


2) Coordonnées

Théorème et définition 37

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. On dit alors que les nombres x, y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ et on note $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$. Plus précisément, x est l'abscisse de $\vec{u}$, y est l'ordonnée de $\vec{u}$ et z est la cote de $\vec{u}$.
2. Si M est un point de l'espace alors les coordonnées de M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si ces coordonnées sont $(x\,;y\,;z)$, on note $M\,(x\,;y\,;z)$.



Vocabulaire. Dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, la droite $(O,\vec{i})$ est appelée *axe des abscisses*, la droite $(O,\vec{j})$ est appelée *axe des ordonnées* et la droite $(O,\vec{k})$ est appelée *axe des cotes.*

Propriété 38

L'espace est muni d'un repère quelconque $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$. Soit $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs de l'espace, k un réel et $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace. Alors,

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$.
2. Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(x+x'\,;y+y'\,;z+z')$.
3. Les coordonnées de $-\vec{u}$ sont $(-x\,;-y\,;-z)$.
4. Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx\,;ky\,;kz)$.
5. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$.
6. Les coordonnées du milieu I de [AB] sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Exemple 39. — On reprend le cube ABCDEFGH de l'exemple 22 et on suppose que AB = 1.
Justifier que $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace et déterminer les coordonnées des 8 sommets du cube dans ce repère.

Corollaire 40

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'espace sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées dans un repère quelconque sont proportionnelles.

Exemple 41. Reprendre les exemples 29 et 45 du chapitre 2 en utilisant un repère adapté. Précisément, on reprenant le cube de l'exemple 22, on note I le milieu de [HG] et K le centre de gravité du triangle AHG. Montrer que :

1. les points B, K et H sont alignés ;
2. les points I, G, K et B sont coplanaires.

3) Distance dans un repère orthonormé

Théorème 42

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Si $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B\,;z_B)$ sont deux points de l'espace alors

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Exemple 43. On reprendre le cube ABCDEFGH de l'exemple 22. Démontrer que le triangle EBG est équilatéral d'abord sans utiliser de repère puis en munissant l'espace d'un repère orthonormé adapté.

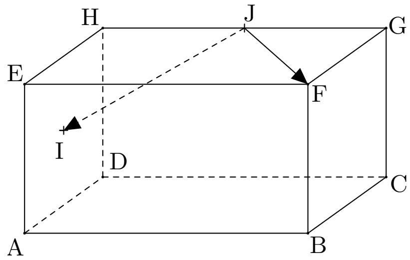
Exemple 44. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A\,(1\,;-2\,;3)$, $B\,(3\,;-1\,;1)$ et $C\,(2\,;0\,;5)$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Propriété 45

On suppose que l'espace est muni d'un repère **orthonormé** $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soir $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs de l'espace. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

Exemple 46. Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ et $AB = 2$. On note I le centre du carré ADHE et J le milieu de [GH].
Calculer $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}$. En déduire une valeur arrondie au dixième de degré près de $\widehat{IJF}$.



Exercice 47. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(1\,;-1\,;1)$, $B(0\,;2\,;3)$, $C(2\,;0\,;-1)$ et $D(4\,;6\,;5)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de (AB).
   b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de D sur (AB).
   c. En déduire la distance de D à (AB).
2. **a.** Déterminer les coordonnées de vecteurs d'une base (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de D sur (ABC).
   c. En déduire la distance de D à (ABC).