⧫ Chapitre 5 : Dénombrement

Dans tout ce chapitre, sauf mention du contraire, p désigne un entier naturel non nul.

I. — Notions ensemblistes

1) Vocabulaire

Définition 1

Un ensemble E est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de E. Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Exemple 2.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Ainsi, $3 \in \mathbb{N}$.
2. L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est l'unique ensemble ne contenant aucun élément.
3. L'alphabet français $\mathcal{A}$ est un ensemble dont les éléments sont les lettres. Ainsi, $\mathrm{r} \in \mathcal{A}$.

Remarque 3. Un ensemble n'est pas ordonné et ne contient chaque élément qu'une seule fois. Ainsi, $\{2,3,4\} = \{4,3,2\} = \{2,4,2,3,4,2,3,3,2,4,4,2\}$.

Définition 4

Soit E un ensemble. Une partie de E (ou un sous-ensemble de E) est un ensemble F tel que tout élément de F est aussi un élément de E. On note alors $F \subset E$ (« F est inclus dans E »). De plus, si $x \in E$ n'appartient pas à F, on note $x \notin F$.

Exemple 5.

1. $F = \{1,3,5\}$ est une partie de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. On a $3 \in F$ et $6 \notin F$.
2. L'ensemble des entiers impairs est une partie de l'ensemble des entiers.
3. On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Propriété 6. — Principe de double-inclusion

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Propriété 7

Soit E un ensemble. La collection des parties de E est un ensemble. On l'appelle l'ensemble des parties de E et on le note $\mathscr{P}(E)$.

Remarque 8. Quel que soit l'ensemble E, $\varnothing$ et E appartiennent $\mathscr{P}(E)$ donc $\mathscr{P}(E)$ n'est jamais vide.

Exemple 9.

1. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
2. $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$
3. $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

2) Opérations ensemblistes

Définition 10

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

1. l'intersection de A et B, notée $A \cap B$ (« A inter B »), comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B ;
2. l'union (ou la réunion) de A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B ;
3. la différence ensembliste de A et B, notée $A \setminus B$ (« A privé de B »), comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B ;
4. le complémentaire de A (dans E), noté $\overline{A}$ (« A barre »), comme la différence de E et A i.e. l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Exemple 11. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ alors $A \cap B = \{3, 5, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{1, 9\}$, $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ et $\overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Remarque 12. De manière plus générale, si A_1, A_2, ..., A_p sont des parties d'un ensemble E, on peut définir $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p$ comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i et $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ comme l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins l'un des A_i.

Propriété 13. — commutativité et associativité

Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ ($\cap$ et $\cup$ sont commutatifs).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ($\cap$ et $\cup$ sont associatifs).

Propriété 14. — distributivité

Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$).
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$).

Propriété 15. — Lois de de Morgan

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3) Partitions

Définition 16

1. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On dit que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints si, pour tout $i \in I$ et tout $j \in I$ tels que $i \neq j$, A_i et A_j sont disjoints.

Exemple 17.

1. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors les parties $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 5\}$ sont disjointes.
2. Si $E = \mathbb{R}$, les intervalles $A_i = [i\,; i + 1[$ pour $i \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints.

Définition 18

Soit E un ensemble et A_1, A_2, ..., A_p des parties de E. On dit que la famille $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ est une partition de E si :

- pour tout entier i entre 1 et p, $A_i \neq \varnothing$;
- les ensembles A_i sont deux à deux disjoints ;
- $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$.

Exemple 19.

1. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ forment une partition de E.
2. L'ensemble P des entiers pairs et l'ensemble I des entiers impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$.
3. Si E est un ensemble non vide et A est une partie de E différente de $\varnothing$ et de E alors $(A, \overline{A})$ est une partition de E.
4. Les ensembles $\mathbb{R}_+^*$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}_-^*$ forment une partition de $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ ne forment pas une partition de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} \neq \varnothing$.

4) Produit cartésien

Définition 20

Soit E et F deux ensembles. On définit le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$ (ce qui se lit « E croix F »), comme l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque 21. Si $E = F$, on note E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemple 22.

1. Si $E = \{0\,;1\,;2\}$ et $F = \{a\,;b\}$ alors $E \times F = \{(0\,;a)\,;(1\,;a)\,;(2\,;a)\,;(0\,;b)\,;(1\,;b)\,;(2\,;b)\}$.
2. $\mathbb{Z}^2$ désigne l'ensemble des couples d'entiers $(a\,;b)$. Ainsi, $(2\,;-6) \in \mathbb{Z}^2$ car $2 \in \mathbb{Z}$ et $-6 \in \mathbb{Z}$ mais $\left(2\,;\frac{7}{3}\right) \notin \mathbb{Z}^2$ car $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de réels. Par le choix d'un repère, cet ensemble peut s'interpréter graphiquement comme l'ensemble des coordonnées des points du plan.

Remarque 23. De manière plus générale, si n est un entier au moins égal à 2, on peut définir le produit cartésien de p ensembles E_1, E_2, ..., E_p comme l'ensemble des listes ordonnées de p éléments $(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_p)$ telles que $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, ..., $a_p \in E_p$. De même, on note E^p au lieu de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$

Un élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ s'appelle un $k-$uplet (ou une $k-$liste). Pour $k = 3$, on parle de triplet et, pour $k = 4$, on parle quadruplet.

II. — Dénombrement

1) Ensemble fini et cardinal

Définition 24

On dit qu'un ensemble est fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'un ensemble est infini.

Exemple 25. Les ensembles $\{a\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{0, 1\}$, $\varnothing$ sont des ensembles finis. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $[0\,;1]$ sont infinis.

Définition 26

Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E et se note $\mathrm{Card}(E)$ (ou $|E|$ ou encore $\#E$).

Exemple 27. $\mathrm{Card}(\{a\}) = 1$, $\mathrm{Card}(\{1,2,3,4,5,6\}) = 6$, $\mathrm{Card}(\{0{,}1\}) = 2$, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Propriété 28. — Principe additif

Soit E_1, E_2, ..., E_p des ensembles finis et deux à deux disjoints. Alors,

$$\mathrm{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2) + \cdots + \mathrm{Card}(E_p).$$

Remarque 29. En particulier, si $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ est une partition d'un ensemble fini E alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p)$.

Exemple 30. Dans une station de ski, on a interrogé 20 personnes. Parmi elles, 7 pratiquent le ski de fond, 14 pratiquent le ski de piste et 3 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Parmi les 20 personnes interrogées, combien pratiquent à la fois le ski de fond et le ski de piste ?

Corollaire 31

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,

1. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$;
2. $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

Propriété 32. — Principe multiplicatif

Soit E_1, E_2, ..., E_p des ensembles finis. Alors,

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_p)$$

Exemple 33. On lance une pièce de monnaie et un dé cubique bien équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir *pile* et 6 ?

Corollaire 34

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de $p-$uplets d'éléments de E est n^p.

Exemple 35. En utilisant les lettres de l'alphabet français, combien peut-on constituer de mots de 3 lettres (qui aient un sens ou non) ?

Corollaire 36

Soit E un ensemble fini à n éléments. Alors, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exemple 37. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé cubique. Combien d'évènements différents peut-on associer à cette expérience ?

Remarque 38. Le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$ est égal au nombre de n-uplet de $\{0,1\}$ et au nombre de mots à n lettres sur un alphabet à 2 éléments.

2) k-uplets d'éléments distincts et permutations

Dans toute la suite, n est un entier naturel et E est un ensemble à n éléments.

Propriété 39

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Exemple 40. Au départ d'une course, il y a 12 chevaux. En supposant que tous les chevaux franchissent la ligne d'arrivée, combien y a-t-il de tiercés possibles ? de quintés possibles ?

Définition 41

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre factoriel n, noté $n!$, par :

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \text{ si } n > 0.$$

Exemple 42. On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Remarque 43. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Définition 44

Une permutation de E est un $n-$uplet d'éléments distincts de E. Autrement dit, une permutation de E est une liste ordonnée contenant tous les éléments de E une fois et une seule.

Propriété 45

Le nombre de permutation de E est $n!$.

Exemple 46. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « FRAISE ».

3) Combinaisons

Définition 47

Soit k un entier compris entre 0 et n. Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

Exemple 48. Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ alors $F = \{c\}$ est une combinaison de 1 élément de E et $G = \{a\,;c\,;d\}$ est une combinaison de 3 éléments de E.

Notation 49. Soit k un entier compris entre 0 et n. Le nombre de combinaisons de k éléments de E se note $\dbinom{n}{k}$, ce qui se lit « k parmi n ». Les nombres $\dbinom{n}{k}$ s'appellent les coefficients binomiaux.

Théorème 50

Soit k un entier compris entre 0 et n. Alors, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Remarque 51. En particulier, on a, $\dbinom{n}{0} = 1$, $\dbinom{n}{1} = n$ et $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 52.

1. Dans une classe de 30 élèves, le professeur principal choisit, en début d'année, 2 élèves comme délégués provisoires. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie. On représente à l'aide d'un arbre toutes les possibilités. Combien y a-t-il de chemins dans cet arbre qui contiennent exactement 3 « *pile* » ?
3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».
4. Un urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. On tire simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boules rouge et 2 boules noires ?
5. Depuis 2008, un tirage du loto est constitué de 5 numéros différents compris entre 1 et 49 et d'un numéro chance compris entre 1 et 10. La page Wikipédia consacrée au loto assure qu'un joueur a une chance sur 19 068 840 de gagner le gros lot. Expliquer cette affirmation.

Propriété 53. — Symétrie

Soit k un entier compris entre 0 et n. Alors, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exemple 54. On a donc $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Théorème 55. — Formule de Pascal

On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit k un entier strictement compris entre 0 et n. Alors,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Application 56. Le théorème précédent permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux à l'aide d'un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal » :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1			$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	
2	1	2	1			$\binom{n}{k}$	
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Propriété 57

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.