♦ Chapitre 2. — Vecteurs, droites et plans dans l'espace

I. — Vecteurs de l'espace

1) Définition

Définition 1

Soit A et B deux points de l'espace. Si $A \neq B$, on caractérise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

- sa *direction* : la droite (AB) (ou toute droite parallèle à (AB)) ;
- son *sens* : le sens de A vers B ;
- sa *norme*, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$: la longueur AB.

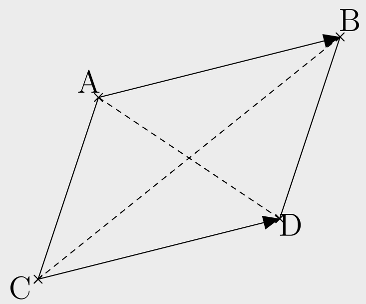
Si $A = B$, on convient de définir un vecteur $\overrightarrow{AA}$, appelé vecteur nul, qui n'a ni direction ni sens mais dont la norme est égale à 0.

Remarque 2. Ainsi, par définition, deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Théorème 3

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ;
2. ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
3. les segments [AD] et [BC] ont même milieu ;
4. le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Vocabulaire

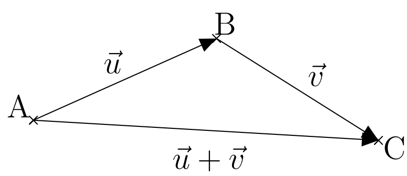
1. Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on dit aussi qu'ils sont des représentants d'un même vecteur qu'on peut noter avec une seule lettre (la plupart du temps $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.)
2. Pour tout point A, $\overrightarrow{AA}$ est un représentant du vecteur nul.

2) Opérations sur les vecteurs

a) Somme de vecteurs

Définition 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et on note C le point tel que $\overrightarrow{BC}$ soit un représentant de $\vec{v}$. Alors, par définition, $\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.



Propriété 5 (Relation de Chasles)

Si A, B et C sont trois points quelconques de l'espace alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Remarque 6. On étend la définition 4 à trois vecteurs en posant, par définition, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. On définit ainsi, par récurrence, la somme de n vecteurs de l'espace.

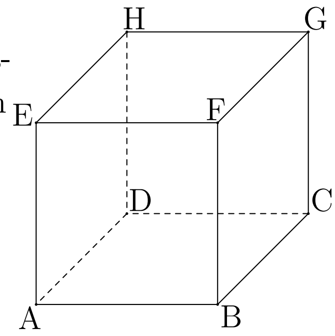
Exemple 7. Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

Propriété 8 (Règle du parallélogramme)

Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Exemple 9. On considère un cube ABCDEFGH. Montrer que le quadrilatère ABGH est un parallélogramme et exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ en fonction $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$.

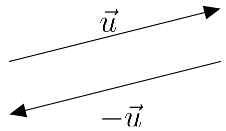
....
....
....
....



b) Différence de vecteurs

Définition 10

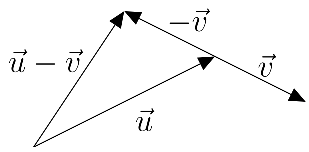
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. On définit l'opposé de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, comme le vecteur ayant même direction et même norme que $\vec{u}$ mais ayant le sens contraire de celui de $\vec{u}$.



Remarque 11. On convient que $-\vec{0} = \vec{0}$.

Définition 12

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On définit le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ par : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Exemple 13. Si A, B et C sont trois points de l'espace alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} =$ ....

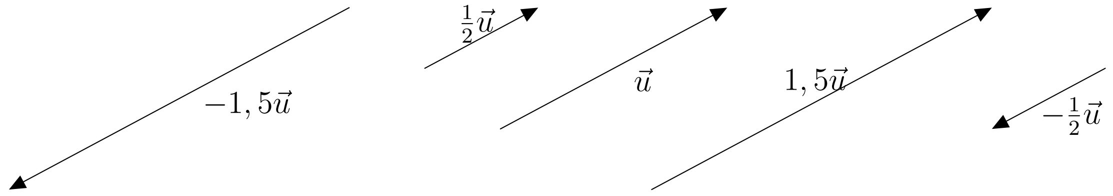
c) Produit par un réel

Définition 14

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. On définit le vecteur $k\vec{u}$ comme le vecteur ayant même direction que $\vec{u}$, même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et sens contraire de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$ et une norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Remarque 15. On convient, par ailleurs, que, pour tout réel k, $k\vec{0} = \vec{0}$ et que, pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 16.



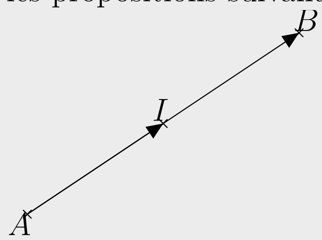
Remarque 17.

1. Si $k=-1$, on retrouve la définition de l'opposé de $\vec{u}$.
2. Par définition, $k\vec{u}=\vec{0}$ si et seulement si $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.

Propriété 18

Soit A, B et I trois points de l'espace. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. I est le milieu de [AB] ;
2. $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{IB}}$;
3. $\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\vec{0}$;
4. $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Définition 19

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ des vecteurs de l'espace. On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ s'il existe des réels k_1, k_2, ..., k_n tels que $\vec{v}=k_1\vec{u_1}+k_2\vec{u_2}+\cdots+k_n\vec{u_n}$.

Exemple 20. On reprend le cube de l'exemple 9. Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

d) Règles de calcul sur les vecteurs

Les règles de calcul sur les vecteurs sont essentiellement les mêmes que celles sur les nombres réels. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels k et k' :

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ [*associativité* de la somme]
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ [*commutativité* de la somme]
3. $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ [$\vec{0}$ est un élément *neutre* pour l'addition]
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$ [$-\vec{u}$ est *l'opposé* de $\vec{u}$]
5. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ [*distributivité à droite* du produit sur la somme]
6. $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$ [*distributivité à gauche* du produit sur la somme]
7. $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
8. $1\vec{u}=\vec{u}$.

Exemple 21. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que

$$\vec{u}+\frac{1}{2}(\vec{w}-\vec{v})=\frac{1}{3}(5\vec{w}+\vec{u}-2\vec{v}).$$

Écrire $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

II. — Colinéarité et droites de l'espace

1) Vecteurs colinéaires

Définition 22

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ i.e. s'il existe des réels a et b non tous les deux nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$.
Deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires sont dits non colinéaires ou (linéairement) indépendants.

Exemple 23. Soit A, B, C et D des points de l'espace tels que $2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sont colinéaires.

Remarque 24.

1. Par définition, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$ car, pour tout vecteur $\vec{v}$, $0\vec{v} + 1\vec{0} = \vec{0}$.
2. Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires équivaut à dire que, pour tous réels a et b, si $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ alors $a = b = 0$.

Propriété 25

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 26. La propriété 38 assure que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Exemple 27. On reprend le cube de l'exemple 9. Déterminer tous les vecteurs colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ dont les extrémités sont des sommets du cube.

Théorème 28 (Caractérisation de l'alignement et du parallélisme)

Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

Exemple 29. On reprend le cube de l'exemple 9. On note K le centre de gravité du triangle AHG. Démontrer que les points B, K et H sont alignés.

2) Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Définition 30

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace et $\vec{v}$ un vecteur non nul de l'espace. On dit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points A et B appartenant à $\mathcal{D}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Propriété 31

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors, un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 32. On reprend le cube de l'exemple 9. On note M le milieu de [AB] et N le milieu de [BC]. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ est un vecteur directeur de la droite (AC).

Propriété 33

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, A un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors, un point M de l'espace appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires i.e. si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = k\vec{v}$.

Notation 34. Ainsi, une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est entièrement déterminée par un point A et un vecteur directeur $\vec{v}$. Ceci justifie que la droite $\mathcal{D}$ se note également $(\mathrm{A}, \vec{v})$.

III. — Coplanarité et plans de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

Définition 35

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ i.e. s'il existe des réels a, b et c non tous les trois nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
Trois vecteurs qui ne sont pas coplanaires sont dits non coplanaires ou (linéairement) indépendants.

Exemple 36. Soit A, B, C, D et E des points de l'espace tels que $2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ sont coplanaires.

Remarque 37.

1. Par définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors, pour tout vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe deux réels non tous les deux nuls a et b tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ et donc, quel que soit le vecteur $\vec{w}$, $a\vec{u} + b\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires car a ou b n'est pas nul.
2. Dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires équivaut à dire que, pour tous réels a, b et c, si $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ alors $a = b = c = 0$.

Propriété 38

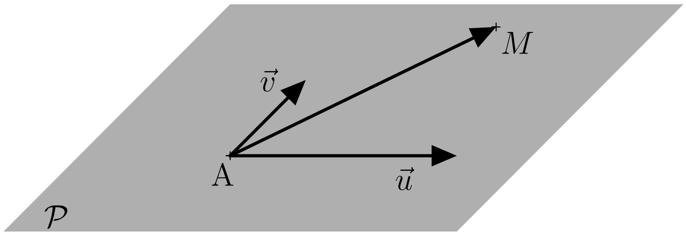
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. Alors, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels k et k' tel que $\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$.

Exemple 39. On reprend le cube de l'exemple 9. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont coplanaires.

2) Plans de l'espace

Définition 40

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit coplanaires i.e tels qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = a\vec{u} + b\vec{v}$.



Un tel plan est noté $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et on dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de plan.

Propriété 41

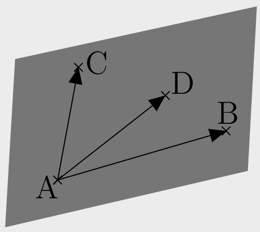
Trois points non alignés définissent un unique plan qu'on note (ABC).

Remarque 42.

1. Une autre façon de formuler la proposition précédente consiste à dire que par trois points non alignés de l'espace passe un plan et un seul.
2. Dans la pratique, on utilisera très souvent une conséquence du théorème précédent : trois points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires. De plus, on peut alors dire que $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

Théorème 43

Quatre points A, B, C et D de l'espace appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont coplanaires.



Définition 44

Des points appartenant à un même plan sont dits coplanaires.

Exemple 45. On reprend les notations de l'exemple 29. On note I le milieu de [HG]. Démontrer que les points I, G, K et B sont coplanaires.

Exemple 46. Si on reprend le cube de l'exemple 9, on peut dire que (EFG) est le plan passant par E et dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$. Remarquons qu'on peut tout aussi bien dire que (EFG) est le plan passant par H et dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$.

Propriété 47

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A et B deux points de $\mathcal{P}$. Alors, pour tout point C du plan $\mathcal{P}$, la parallèle à (AB) passant par C est incluse dans $\mathcal{P}$. En particulier, $(\mathrm{AB}) \subset \mathcal{P}$.

3) Bases de l'espace

Définition 48

Une base de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Exemple 49. Si on reprend le cube de l'exemple 9, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{A}E})$ est une base de l'espace.

Axiome 50

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace. Tout vecteur $\vec{s}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ i.e. il existe des réels a, b et c tel que $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Exemple 51. On reprend le cube de l'exemple 9. On note I milieu de [HG]. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{CG}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{HE}})$.

Propriété 52

Avec les notations précédentes, les réels a, b et c sont uniques.

IV. — Positions relatives de droites et de plans

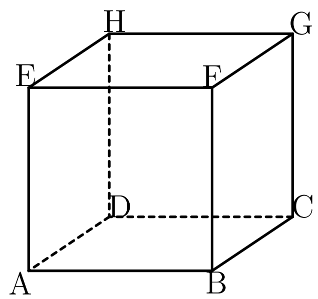
1) Positions relatives de deux droites

Définition 53

On dit que deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un plan $\mathcal{P}$ contenant ces deux droites. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **non coplanaires**.

Exemple 54. On

— les droites (AB) et (BC) sont ....
— les droites (AB) et (CD) sont ....
— les droites (AB) et (EF) sont ....
— les droites (AB) et (HG) sont ....
— les droites (AB) et (FB) sont ....
— les droites (AB) et (CG) sont ....



Définition 55

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace. On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si elles ont un point commun et un seul.

Exemple 56. En reprenant la figure de l'exemple 9, citer toutes les droites sécantes à (AB) au point A.

....

Théorème 57

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace. Alors, on est dans l'un des quatre cas suivants :

coplanaires			**non coplanaires**
sécantes	parallèles		
	strictement	confondues	

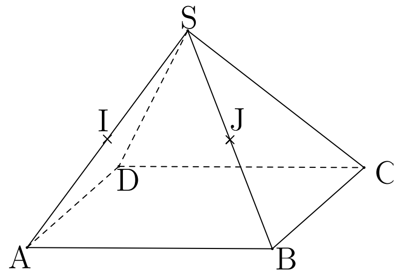
Remarque 58.

1. Il y a donc dans l'espace un cas de plus que dans le plan : le cas des droites non coplanaires qui ne sont ni parallèles ni sécantes.
2. Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre. Dès lors, deux droites ont des vecteurs linéairement indépendants si et seulement si elles sont soit sécantes soit non coplanaires.

Théorème 59

Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple 60. On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré. On note I et J les milieux respectifs de [SA] et [SB]. Démontrer que (IJ) est parallèle à (CD).



2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition 61

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On considère un vecteur directeur $\vec{w}$ de $\mathcal{D}$ et une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants.

Remarque 62. On peut montrer que cette définition est indépendante du choix $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Théorème 63

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors, on est dans l'un des trois cas suivants :

parallèles		**sécants**
strictement	$\mathcal{D}$ contenue dans $\mathcal{P}$	

Théorème 64

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ incluse dans le plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

Exemple 65. En reprenant la figure de l'exemple 60, démontrer que (IJ) est parallèle à (SCD).

3) Positions relatives de deux plans de l'espace

Définition 66

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles (ou ont la même direction) si toute base de l'un est aussi une base de l'autre. Dans le cas contraire, on dit que les plans sont sécants.

Remarque 67. Dans la pratique, pour montrer que deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, il suffit de considérer une base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ de P_1 et une base $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ de P_2 tels que $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_1$ est colinéaire à $\vec{v}_2$.

Exemple 68. Soit ABCDEFGH le cube de l'exemple 9. On note R, T et S les centre respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE. Démontrer que les plans (AHC) et (RTS) sont parallèles.

Théorème 69

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace. Alors, on est dans l'un des trois cas suivants :

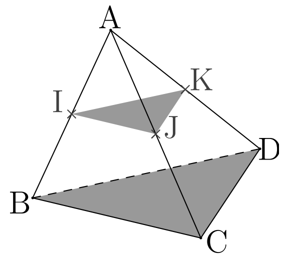
parallèles		**sécants**
strictement	confondus	

Théorème 70

Si deux plans de l'espace sont parallèles à un même troisième alors ils sont parallèles entre eux.

Remarque 71. Comme deux droites sont sécantes si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectif sont linéairement indépendants, deux plans sont parallèles si et seulement si deux droite sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Exemple 72. On considère le tétraèdre ABCD de la figure ci-contre. On note I, J et K les milieux respectifs de [AB], [AC] et [AD]. Démontrer que les plans (BCD) et (IJK) sont parallèles.



4) Parallélisme entre plans et droites

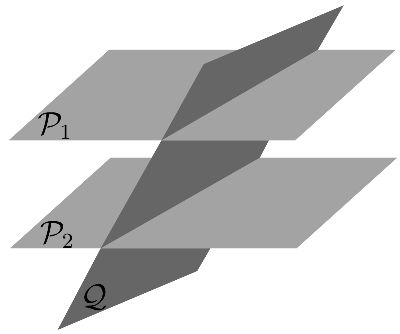
Propriété 73

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.

1. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$.
2. (Théorème du toit) Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ et si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ **et** à $\mathcal{P}_2$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à Δ.

Propriété 74

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles. Alors, tout plan $\mathcal{Q}$ sécant avec $\mathcal{P}_1$ est également sécant avec $\mathcal{P}_2$ et les deux droites $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q}$ sont parallèles.



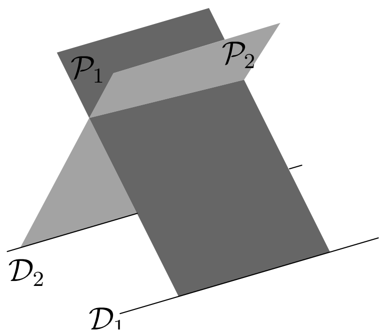
Exemple 75. En reprenant la figure de l'exemple 72, on note L un point de [IJ] et M l'intersection de (AL) avec [BC]. Démontrer que les droites (KL) et (DM) sont parallèles.

Théorème 76 (Théorème du toit, v. 2)

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles de l'espace. On suppose que :

1. $\mathcal{P}_1$ est un plan contenant $\mathcal{D}_1$,
2. $\mathcal{P}_2$ est un plan contenant $\mathcal{D}_2$,
3. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ.

Alors, Δ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$



Exemple 77. On considère un tétraèdre ABCD. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point de [AD] tel que $\text{AK} = \frac{1}{4}\text{AD}$. Montrer que les plans (BCD) et (IJK) sont sécants selon une droite Δ parallèle à la droite (BC).