

# ◆ Chapitre 1. — Rappels et compléments sur les suites réelles

## I. — Variations d'une suite

### Définition 1

Soit  $N$  un entier naturel et  $(u_n)$  une suite réelle définie (au moins) à partir du rang  $N$ . On dit que :

- $(u_n)$  est **croissante** à partir du rang  $N$  si, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ .
- $(u_n)$  est **décroissante** à partir du rang  $N$  si, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .
- $(u_n)$  est **constante** à partir du rang  $N$  si pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .
- $(u_n)$  est **monotone** à partir du rang  $N$  si, à partir du rang  $N$ ,  $(u_n)$  ne change pas de variation (i.e. si elle reste croissante ou si elle reste décroissante).

Remarque 2.

1. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = (-1)^n$  qui est telle que, si  $n$  est pair,  $u_n = 1$  et  $u_{n+1} = -1$  donc  $u_n > u_{n+1}$  et, si  $n$  est impair,  $u_n = -1$  et  $u_{n+1} = 1$  donc  $u_n < u_{n+1}$ .
2. Si, dans la définition 1, les inégalités sont strictes, on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

Pour étudier les variations d'une suite  $(u_n)$  (au moins à partir d'un certain rang  $N$ ), on dispose de diverses méthodes.

### Méthode 3 : utiliser la définition

Comparer directement  $u_n$  et  $u_{n+1}$

**Exemple 4.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $0 \leq n \leq n+1$  donc, comme  $2 > 0$ ,  $0 \leq 2n \leq 2(n+1)$  et ainsi  $0 < 2n+1 \leq 2(n+1)+1$ . Par décroissance de la fonction inverse sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)+1}$  i.e.  $u_n \geq u_{n+1}$ . Ainsi,  $(u_n)$  est décroissante.

### Méthode 5 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  alors  $(u_n)$  est croissante à partir du rang  $N$  et si, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  alors  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $N$

**Exemple 6.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = n^2 - 5n + 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 1 = n^2 - 3n - 3$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 3n + 3 - (n^2 - 5n + 1) = n^2 - 3n + 3 - n^2 + 5n - 1 = 2n - 4.$$

Ainsi,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  si et seulement si  $2n - 4 \geq 0$  i.e.  $n \geq 2$ . On conclut donc que  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 2.

### Méthode 7 : Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

On suppose que  $(u_n)$  est une suite à termes strictement positifs.

Si, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  alors  $(u_n)$  est croissante à partir du rang  $N$  et si, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  alors  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang  $N$ .

**Exemple 8.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{5^n}{7^n}$ .

Comme  $5 > 0$  et  $7 > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $7^n > 0$  et  $5^n > 0$  donc  $u_n > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}}{\frac{5^n}{7^n}} = \frac{5 \times 5^n}{7 \times 7^n} \times \frac{7^n}{5^n} = \frac{5}{7} \leq 1$$

donc  $(u_n)$  est décroissante.

### Méthode 9 : étudier les variations d'une fonction

On suppose qu'il existe une fonction  $f$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = f(n)$ . Si  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $[N; +\infty[$  alors  $(u_n)$  est croissante (resp. décroissante) à partir du rang  $N$ .

**Exemple 10.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$ .

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$  définie sur  $I = [0; +\infty[$ . La fonction  $f$  est le quotient de deux fonctions affines donc  $f$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout réel  $x \in I$ ,

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - (x-3) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1 - (2x-6)}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2}$$

Ainsi, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et donc  $(u_n)$  est croissante.

### Méthode 11 : utiliser un raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que la proposition  $P_n : \langle u_{n+1} \geq u_n \rangle$  (ou  $P_n : \langle u_{n+1} \leq u_n \rangle$ ) est vraie pour tout  $n \geq N$ .

**Exemple 12.** Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_{n+1} = 0,3u_n + 1$ .

Contrairement aux autres méthodes, pour utiliser une récurrence, il faut savoir ce qu'on cherche à montrer donc avoir une idée des variations de  $(u_n)$ . Pour cela, on peut calculer les premiers termes pour faire une conjecture. Ici,  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 1,9$ ,  $u_2 = 1,57$ ,  $u_3 = 1,471$  donc on peut conjecturer que  $(u_n)$  est décroissante. Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $P_n$  «  $u_{n+1} \leq u_n$  ».

Comme  $u_1 = 1,9 \leq 3 = u_0$ ,  $P_0$  est vraie.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P_k$  est vraie. Alors,  $u_{k+1} \leq u_k$  donc, en multipliant par  $0,3 > 0$ ,  $0,3u_{k+1} \leq 0,3u_k$  et, en ajoutant 1,  $0,3u_{k+1} + 1 \leq 0,3u_k + 1$  i.e.  $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ . Ainsi,  $P_{k+1}$  est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$  donc  $(u_n)$  est décroissante.

Remarque 13.

1. Plusieurs méthodes peuvent fonctionner pour une même suite. Le premier exemple peut tout aussi bien s'étudier avec la méthode 5 ou la méthode 9.
2. La méthode 5 est celle qu'on utilise le plus souvent.
3. La méthode 7 peut aussi s'appliquer pour des suites à valeurs strictement négatives mais il faut bien prendre garde à changer le sens de l'inégalité au moment de multiplier par  $u_n$ . Elle s'appliquera plus particulièrement aux suites faisant intervenir des produits (notamment des nombres à la puissance  $n$ ). Dans tous les cas, **elle ne s'applique pas aux suites dont les termes changent de signe !**
4. La méthode 9 n'admet pas de réciproque. Les variations de  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$  ne permettent pas de déterminer celles de la fonction  $f$ .

## II. — Suites majorées, minorées, bornées

### Définition 14

Soit  $N$  un entier naturel et  $(u_n)$  une suite réelle définie à partir du rang  $N$ . On dit que :

- $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \leq M$ .  
On dit alors que  $M$  est un majorant de la suite  $(u_n)_{n \geq N}$ .
- $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq m$ .  
On dit alors que  $m$  est un minorant de la suite  $(u_n)_{n \geq N}$ .
- $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée i.e. s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $m \leq u_n \leq M$ .

Remarque 15. Un majorant (resp. un minorant) n'est pas unique car, si  $M$  est un majorant d'une suite  $(u_n)_{n \geq N}$  alors tout nombre réel  $M' \geq M$  (resp.  $m' \leq m$ ) est également un majorant (resp. un minorant) de  $(u_n)_{n \geq N}$  car, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_n \leq M \leq M'$  (resp.  $u_n \geq m \geq m'$ ).

**Exemple 16** (À CONNAÎTRE). Démontrer que les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = \cos(n)$ ,  $v_n = (\sin(n))$  et  $w_n = (-1)^n$  sont bornées.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n \leq 1$ ,  $-1 \leq v_n \leq 1$  et  $-1 \leq w_n \leq 1$ .

**Exemple 17.** Démontrer que la suite  $(t_n)$  définie, pour tout entier  $n \geq 1$ , par  $t_n = 1 + \frac{1}{n}$  est bornée.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, par décroissance de la fonction inverse sur  $[1; +\infty[$ ,  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$  donc  $1 < t_n \leq 2$ .

**Exemple 18.** Démontrer que la suite  $(s_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $s_n = n^2 - n + 1$  est minorée.

En utilisant la forme canonique, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

donc  $(s_n)$  est minorée par  $\frac{3}{4}$ .

**Exemple 19** (À CONNAÎTRE). Démontrer que toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée).

Supposons que  $(u_n)$  est une suite croissante. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n$  donc  $(u_n)$  est minorée par son premier terme  $u_0$ . De même, une suite décroissante est majorée par son premier terme.

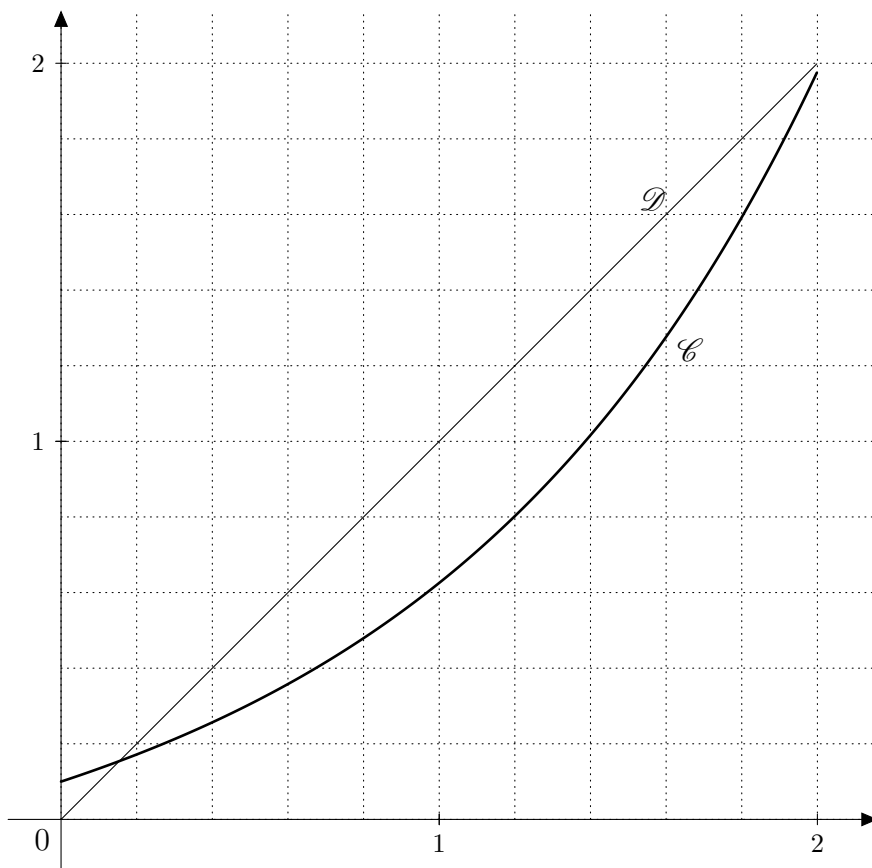
### III. — Un exemple d'étude de suite définie par une relation de récurrence

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par  $f(x) = \frac{2e^{2x} - 1}{7e^x + 3}$ . On note  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x$  et  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.

Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; 2]$ .

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{9}{5}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  c'est-à-dire  $u_{n+1} = \frac{2e^{2u_n} - 1}{7e^{u_n} + 3}$ .

- Calculer des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- Sur la figure ci-dessous, placer  $u_0$  sur l'axe des abscisses et construire  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  sur cet axe. Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de  $(u_n)$ ?
- Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .  
Que peut-on en déduire?



#### Solution

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 2]$  par composition, somme et quotient de fonctions

dérivables et, pour tout  $x \in [0; 2]$ ,

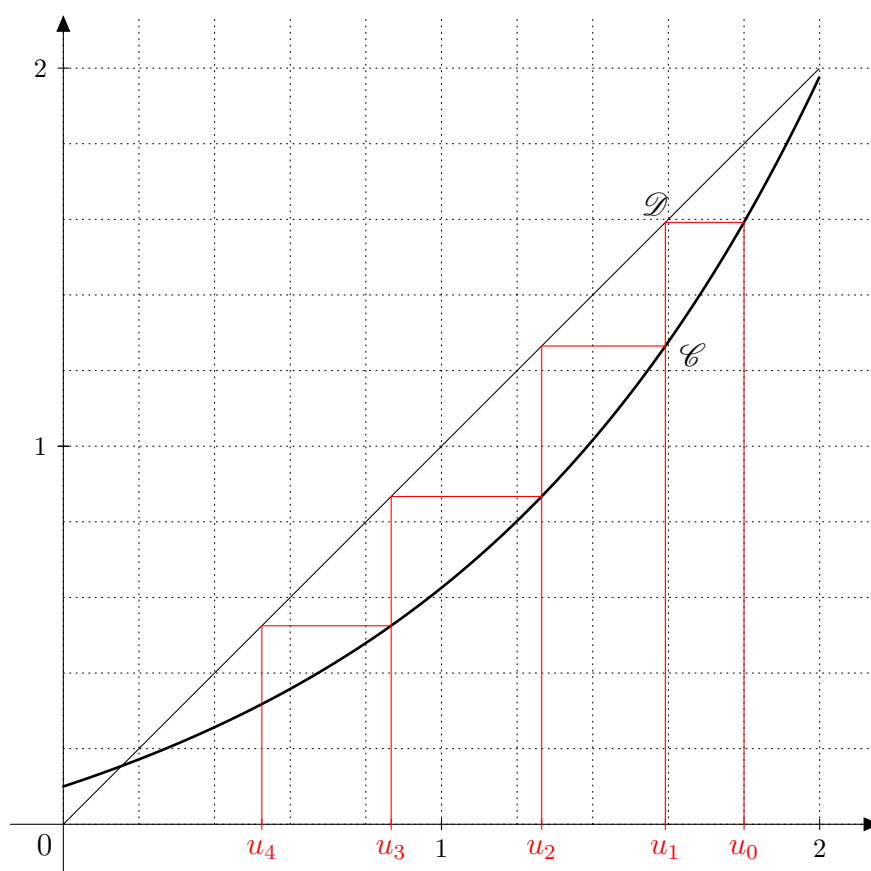
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times 2e^{2x}(7e^x + 3) - (2e^{2x} - 1) \times 7e^x}{(7e^x + 3)^2} \\ &= \frac{28e^{3x} + 12e^{2x} - 14e^{3x} + 7e^x}{(7e^x + 3)^2} \\ &= \frac{14e^{3x} + 12e^{2x} + 7e^x}{(7e^x + 3)^2}. \end{aligned}$$

Or, la fonction exponentiel est à valeurs strictement positive donc, pour tout  $x \in [0; 2]$ ,  $f'(x) \geq 0$ . Ainsi,  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$ .

2. a.  $u_1 = f(u_0) \approx 1,59$ ,  $u_2 = f(u_1) \approx 1,26$  et  $u_3 = f(u_2) \approx 0,87$ .

À partir de ces valeurs, on peut conjecturer que  $(u_n)$  est décroissante.

b.



- c. Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $P_n$  : «  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$  ».

On a  $u_0 = 1,8$  et  $u_1 \approx 1,59$  donc  $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$  i.e.  $P_0$  est vraie.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $P_k$  est vraie. Ainsi,  $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 2$  donc, comme  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$ ,  $f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(2)$  i.e.  $f(0) \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq f(2)$ . De plus,  $f(0) = \frac{1}{10} \geq 0$  et  $f(2) \approx 1,98 \leq 2$  donc  $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 2$ . Ainsi,  $P_{k+1}$  est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ .

On en déduit donc que  $(u_n)$  est décroissante et bornée par 0 et 2.