

◆ Chapitre 13. — Intégration

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Si f est une fonction, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Lorsqu'on parle de l'intervalle $[a; b]$, il est sous-entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$. Enfin, on dira qu'une fonction f définie sur un ensemble E est positive sur un intervalle $[a; b] \subset E$ si, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$.

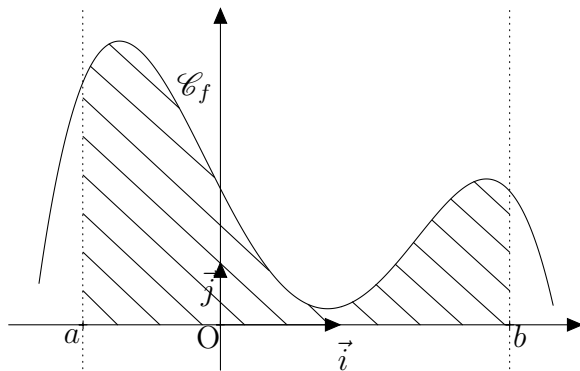
I. — Intégrale d'une fonction continue et positive

Le plan étant muni d'un repère, une unité est choisie en abscisse (à savoir $\|\vec{i}\|$) et une unité est choisie en ordonnée (à savoir $\|\vec{j}\|$). Dès lors, le plan est naturellement muni d'une unité d'aire (u.a.) : c'est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

1) Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$. On définit l'intégrale de a à b de la fonction f comme l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ i.e. la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarque 2. L'intégrale est donc le nombre d'unités d'aire que représente l'aire sous la courbe. En particulier, l'intégrale est un nombre réel **sans unité**. On peut, de plus, démontrer que ce nombre ne dépend pas du repère choisi.

Notation 3. Si f est une fonction de la variable x alors l'intégrale de a à b de la fonction f est notée $\int_a^b f(x) dx$.

Remarque 4. Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, on convient de poser, pour tout réel $c \in [a; b]$, $\int_c^c f(x) dx = 0$.

Exemple 5. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

$$I_1 = \int_{-1}^5 4 dx$$

$$I_2 = \int_0^3 2t + 1 dt$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$$

Remarque 6.

1. On peut généraliser facilement le calcul de I_1 : si m est un réel positif alors $\int_a^b m dx = m(b-a)$.

2. La variable x dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$ est une variable *muette* : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur de l'intégrale. Ainsi, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds \dots$

2) Théorème fondamental et conséquences

Exemple 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 4$. Soit x un réel supérieur ou égal à -1 .

1. Calculer $I_x = \int_{-1}^x f(t) dt$.
2. On considère la fonction F qui à tout $x \geq -1$ associe $F(x) = I_x$. Calculer la dérivée de F . Que constate-t-on ?

Théorème 8

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors, la fonction F définie pour tout $x \in [a; b]$ par $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Corollaire 9

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Si F est une primitive de f sur $[a; b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Exemple 10. Calculer l'intégrale de 0 à 1 de $f : x \mapsto x^2$.

Théorème 11

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II. — Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1) Définition

Théorème et définition 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I . Alors, quelle que soit la primitive F de f , la différence $F(b) - F(a)$ prend la même valeur. Par définition, cette valeur est appelée l'*intégrale de a et b de la fonction f* et on la note $\int_a^b f(x) dx$.

Notation 13. On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque 14.

1. Par définition, on a donc $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f . En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I et si $a \in I$ alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.
2. Avec cette définition, on retrouve le fait que, si f est une fonction continue sur un intervalle I alors, pour tout réel $c \in I$, $\int_c^c f(x) dx = F(c) - F(c) = 0$.
3. De même, on retrouve que si m un réel alors $\int_a^b m dx = [mx]_a^b = mb - ma = m(b - a)$.
4. Dans le cas où f est continue et positive et $a < b$, les définitions 1 et 11 coïncident d'après le corollaire 8.

Exemple 15. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) dt \quad I_2 = \int_0^{\ln(3)} e^{\frac{x}{2}} dx \quad I_3 = \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u du$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx \quad I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \quad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

2) Propriétés de l'intégrale

a) Linéarité de l'intégrale

Propriété 16

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel quelconque. Alors,

1. $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
2. $\int_a^b k \times f(x) dx = k \times \int_a^b f(x) dx.$



Dans l'égalité 1, il est indispensable que les bornes soient les mêmes pour les 3 intégrales.
Dans l'égalité 2, il faut bien s'assurer que k est une constante i.e qu'elle ne dépend pas de x .

Exemple 17. Calculer $I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} du$ et $J = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t dt$.

b) Positivité et croissance de l'intégrale

Propriété 18

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tel que $a \leq b$. Alors,

1. POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2. CROISSANCE DE L'INTÉGRALE

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.



Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leq b$.

Exemple 19.

1. Comparer $I_1 = \int_0^1 e^t dt$ et $I_2 = \int_0^1 e^{t^2} dt$.
2. Montrer que la suite (I_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(t))^n dt$ est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?

c) Relation de Chasles

Propriété 20

Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I . Soit a , b et c trois réels quelconques appartenant à I . Alors,

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Corollaire 21

Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I . Soit a et b deux réels quelconques appartenant à I . Alors,

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Corollaire 22

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[-a; a]$.

1. Si f est une fonction paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Si f est une fonction impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

3) Intégration par parties

Propriété 23. — Formule d'intégration par parties

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit u et v deux fonctions définies et dérivables $[a; b]$. On suppose, de plus, que les fonctions u' et v' sont continues sur $[a; b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Remarque 24. La formule d'intégration par parties est intéressante si :

1. on ne sait pas trouver directement une primitive de uv' sur $[a; b]$;
2. on connaît une primitive de v sur $[a; b]$;
3. La dérivée de u est « plus simple » que u et/ou on sait déterminer une primitive de $u'v$ sur $[a; b]$.

Exemple 25.

1. Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.
2. Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $J = \int_0^\pi \sin(x) e^x dx$.
4. Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) dt$.

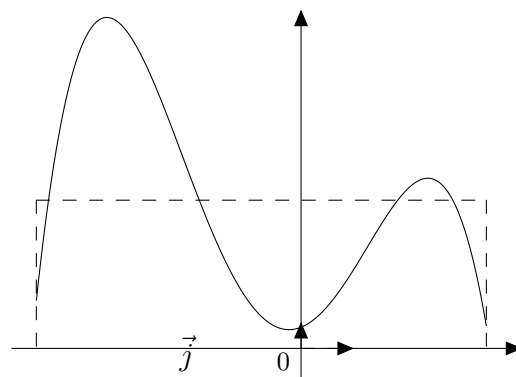
III. — Valeur moyenne d'une fonction**Définition 26**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors, le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive

Par définition, le réel μ vérifie l'égalité $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$. Ceci revient à dire que μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b . Autrement dit, μ est la constante telle que

$$\int_a^b \mu dx = \int_a^b f(x) dx.$$



Exemple 27. Vitesse moyenne pour un mobile ayant une trajectoire rectiligne.

Exemple 28.

1. Calculer la valeur moyenne d'une fonction constante sur un intervalle $[a; b]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{x^2}$ sur $[0; 1]$.

Propriété 29. — Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Si m est un minorant de f sur $[a; b]$ et si M est un majorant de f sur $[a; b]$ (autrement dit, si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$) alors

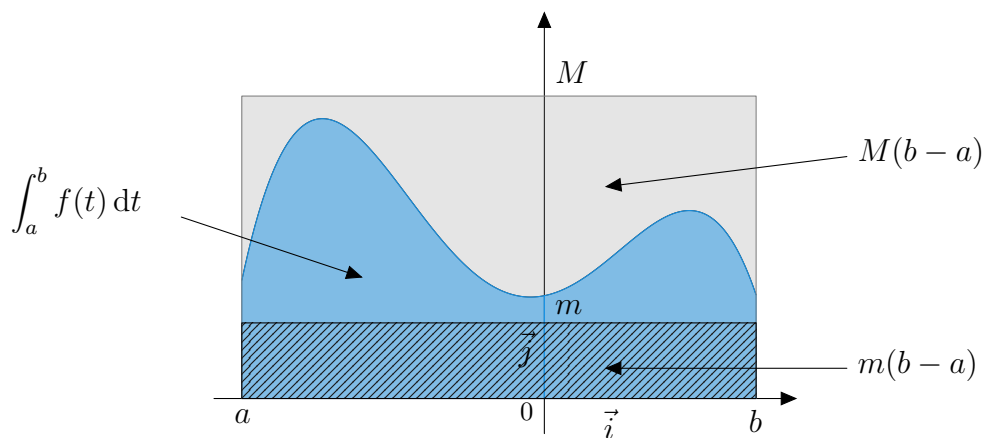
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

En d'autres termes, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est comprise entre m et M .



Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leq b$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive



Exemple 30. Démontrer que $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq 1$.

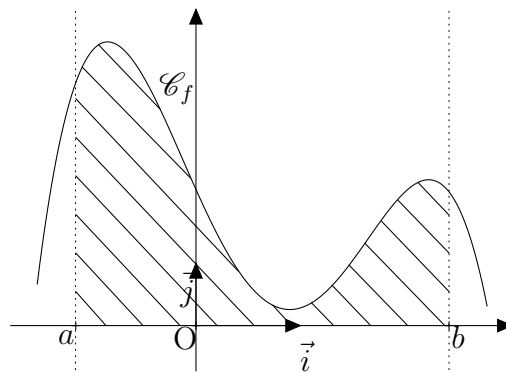
Remarque 31. Si f est une fonction décroissante sur un intervalle $[a; b]$ alors les inégalités de la moyenne assure que

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)f(a).$$

IV. — Calculs d'aires

1) Cas d'une fonction positive

Par définition, si une fonction f est continue et positive sur un segment $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



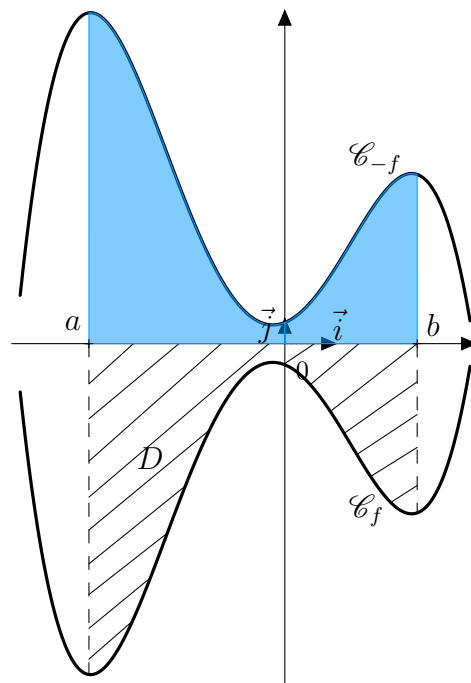
Exemple 32. Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée). On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Soit $b > 1$. Déterminer l'aire $A(b)$, en cm^2 , de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = b$. Que peut-on dire de $A(b)$ lorsque b tend vers $+\infty$? Interpréter.

2) Cas d'une fonction négative

Si f est une fonction continue et négative sur un segment $[a; b]$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est égale à l'opposé de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ car $\int_a^b f(t) dt = - \int_a^b [-f(t)] dt$ et les courbes de f et $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc délimitent des surfaces de même aire.

Exemple 33. Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées). On considère la fonction $f : t \mapsto t \ln(t)$ définie sur $]0; +\infty[$. Déterminer l'aire, en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et le droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.



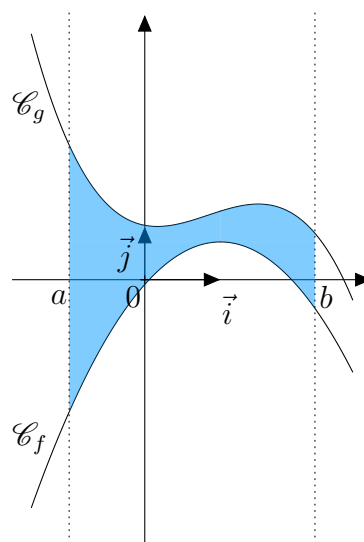
3) Aire entre deux courbes

Soit f et g sont deux fonctions continues et de signes quelconques sur $[a; b]$ telles que, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ (i.e. la courbe de f est entièrement située en dessous de celle sur g sur $[a; b]$) alors l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , celle de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire, $\int_a^b [g(t) - f(t)] dt$.

Exemple 34. Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm. On considère les courbes des fonctions

$$f : x \mapsto \ln(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (\ln(x))^2.$$

Déterminer l'aire S en cm^2 de la partie du plan située entre ces deux courbes sur l'intervalle $[1; e]$.



Remarque 35. Dans le cas général, si f et g sont deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a; b]$, on peut montrer que l'aire, en unités d'aire, entre les courbes de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$ est

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| dt.$$