⧫ Chapitre 8. — Les fonctions sinus et cosinus

I. — Sinus et cosinus d'un nombre réel (Rappels)

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

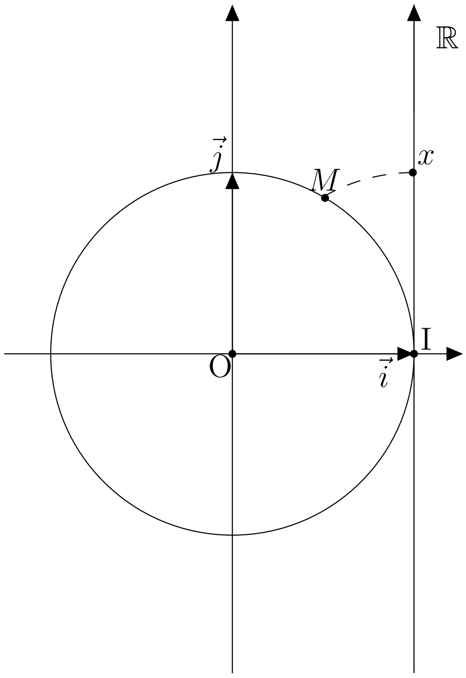
Définition 1

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Définition 2

À tout réel x, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe réel autour de ce cercle. On dit alors que

1. M est le point du cercle associé à x ;
2. x est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$.



Propriété et définition 3

Soit x et y deux nombres réels. Alors, x et y sont associés à un même point du cercle trigonométrique si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $y - x = 2k\pi$. On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on note $x = y\ [2\pi]$.

Exercice 4. — Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{2},\ y = -\frac{3\pi}{2} \qquad \text{b) } x = \frac{2\pi}{3},\ y = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{c) } x = -\frac{5\pi}{12},\ y = \frac{43\pi}{12}.$$

Définition 5

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x. On définit le nombre $\cos x$ comme étant l'abscisse de M et le nombre $\sin x$ comme étant l'ordonnée de M. Autrement dit, les coordonnées de M sont $(\cos x\,;\sin x)$.

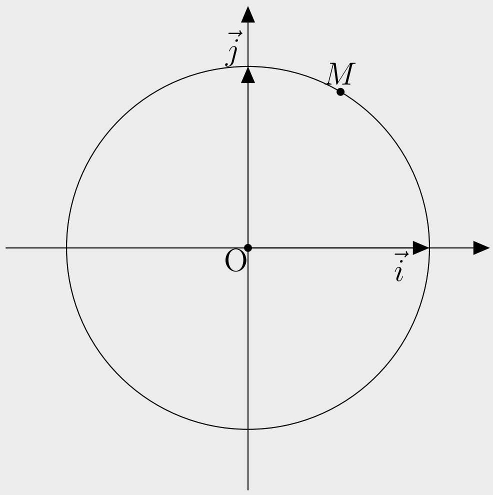
Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété 6

Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k,

1. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
2. $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$;
3. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
4. $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$;
5. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
6. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ ce qui se note également $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



Exercice 7.

1. Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right) \qquad \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}-7\pi\right) \qquad \cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

2. Calculer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \qquad \cos(2016\pi) \qquad \cos\left(\frac{2017\pi}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{2016\pi}{3}\right).$$

3. Soit x un réel tel que $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ et $x \in [-\pi\,;0]$. Déterminer $\sin(x)$.

II. — Étude des fonctions sinus et cosinus

Définition 8

On appelle fonction sinus (resp. cosinus) la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre $\sin x$ (resp. $\cos x$). On note cette fonction sin (resp. cos).

Propriété 9

Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π (on dit aussi 2π-périodiques) ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Conséquence graphique. — Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont constituées d'un motif de longueur 2π qui se répète indéfiniment.

Ceci implique qu'on peut n'étudier ces deux fonctions que sur un intervalle de longueur 2π.

Remarque 10. — De manière générale, si T est un réel strictement positif, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $T-$périodique si, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.

Propriété 11

1. La fonction cos est paire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
2. La fonction sin est impaire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.

Remarque 12. — De manière générale, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ et on dit que f est impaire si, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence graphique

1. La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Ceci, associé à la $2\pi-$périodicité, implique qu'on peut n'étudier ces deux fonctions que sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Or, par définition, il est clair que

1. lorsque x augmente dans $[0\,;\pi]$, l'abscisse du point M diminue de 1 à -1 donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
2. lorsque x augmente dans $[0\,;\pi]$, l'ordonnée du point M augmente de 0 à 1 puis diminue de 1 à 0 le maximum 1 étant atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

On a donc, en complétant par parité pour cosinus et par imparité pour sinus, les tableaux de variation suivants :

x	$-\pi$ $\qquad\qquad$ π
cos	

x	$-\pi$ $\qquad\qquad$ π
sin	

Théorème 13 ADMIS

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\sin'(x) = \qquad\qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = \qquad\qquad .$$

Exercice 14.

1. Montrer que la fonction sinus est concave sur $[0\,;\pi]$.
2. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\sin(x) \leqslant x$.
3. Conclure que, pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

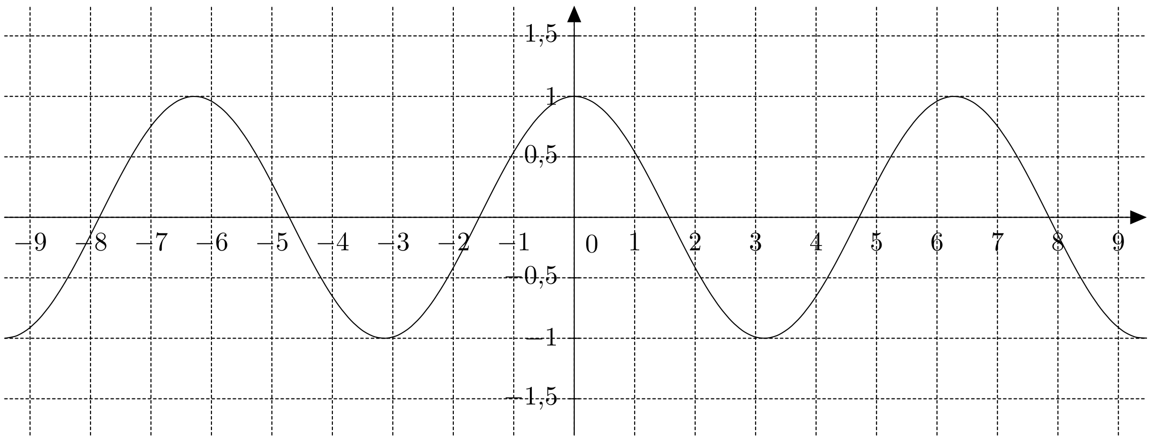
Propriété 15

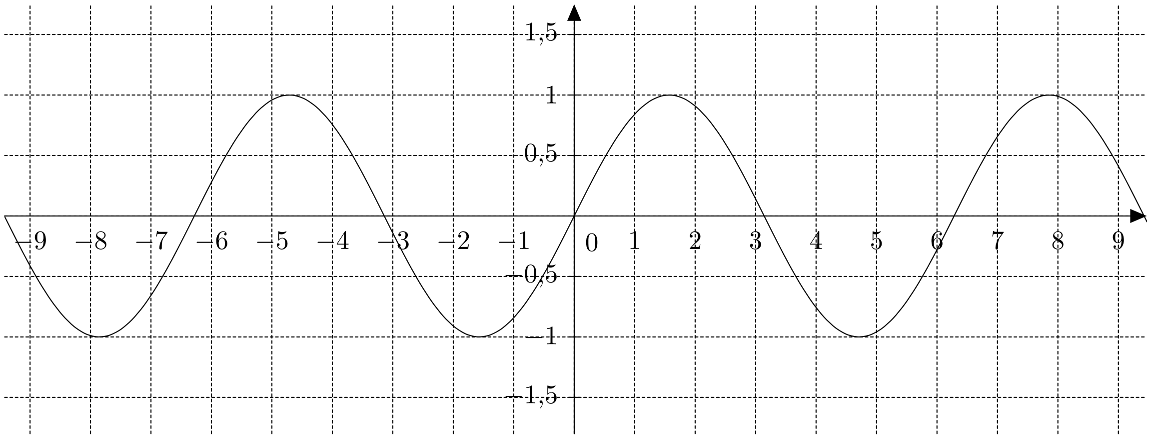
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Exercice 16. Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ **2)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **3)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin(7x)}$

Courbes représentatives





III. — Équations et inéquations trigonométriques

1) Équations

a) L'équation $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété 17

Soit un réel $a \in \,]-\pi\,;\pi]$.
Si $a \notin \{0; \pi\}$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ possède exactement 2 solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ qui sont a et $-a$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $-a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $a = 0$ ou $a = \pi$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\pi]$ qui est a. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\cos x = 0$ **2)** $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **3)** $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ **4)** $\cos(x) = \pi$.

b) L'équation $\sin(x) = \sin(a)$

Propriété 19

Soit $a \in \left]-\pi\,;\pi\right]$.
Si $a \notin \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ possède exactement 2 solutions dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ qui sont a et $\pi - a$ si $a > 0$ ou $-\pi - a$ si $a < 0$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $\pi - a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $a = -\frac{\pi}{2}$ ou $a = \frac{\pi}{2}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet une unique solution dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ qui est a. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 20. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sin x = 0$ **2)** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **3)** $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$

2) Inéquations trigonométriques

Principe général. — Pour résoudre une équation du type $\sin(x) \leqslant \sin(a)$ ou $\cos(x) \leqslant \cos(a)$ sur un intervalle de longueur 2π, on utilise le cercle trigonométrique.

Exemple 21.

1. Résoudre dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'inéquation $\cos x > \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $\left]0\,;2\pi\right]$ l'inéquation $2\sin x - \sqrt{2} \leqslant 0$.
3. Résoudre dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'inéquation $2\sin^2 x > \cos x + 1$.

3) Un exemple d'étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}x - \sin(2x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer que f est une fonction impaire. Quelle conséquence cela a-t-il pour $\mathcal{C}_f$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier relatif k, $f(x + k\pi) = k\pi\sqrt{3} + f(x)$.
4. Etudier les variations de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On donnera, lorsque cela est possible, la valeur exacte et, sinon, une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.
6. L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$ que celles déterminées à la question précédente ? On justifiera soigneusement sa réponse.