♦ Chapitre 11. — Primitives et équations différentielles

I. — Primitives

1) Définition

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 2. Déterminer une primitive de exp sur $\mathbb{R}$, une primitive de $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 5$ sur $\mathbb{R}$ et une primitive de $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors,

1. f admet une infinité de primitives sur I : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle ;
2. si x_0 et y_0 sont deux réels tels que $x_0 \in I$, il existe une et une seule primitive G de f sur I telle sur $G(x_0) = y_0$.

Exemple 4. Déterminer la primitive de sin sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Théorème 5. — (Admis)

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque 6.

1. Il existe des fonctions continues pour lesquelles on ne sait pas explicitement déterminer une primitive. C'est par exemple le cas de la fonction $x \longmapsto \exp\left(-x^2\right)$.
2. Dans le théorème précédent, la condition « f est continue » est suffisante mais pas nécessaire.

2) Primitives et opérations

Propriété 7

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I et que g admet une primitive G sur I. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
2. pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Exemple 8. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto -5x^2 + 3\mathrm{e}^x$.

⚠ Il N'EXISTE PAS FORMULE permettant de déterminer une primitive de $f \times g$ ou de $\dfrac{f}{g}$ à partir de F et G.

3) Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, c désigne une constante réelle quelconque.

Si f est définie par $f(x) =$	alors les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) =$	où $I =$
k (constante réelle)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$

4) Formes particulières dont on sait déterminer les primitives

Dans le tableau suivant, u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et c une constante réelle quelconque.

Les primitives de ...	... sont les fonctions ...	... sur tout intervalle ...
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$	sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	sur lequel u est strictement positive
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	inclus dans I
$x \longmapsto u'(ax+b)$ (a et b réels tels que $a \neq 0$)	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b) + c$	où cela a un sens

Remarque 9. Ces « formules » ne sont rien d'autres qu'une lecture « à l'envers » de la formule de dérivation d'une fonction composée : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Exemple 10. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné.

1) $f_1 : t \longmapsto 2t(t^2+1)^5\,; I = \mathbb{R}$
2) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\,; I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
3) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\,; I = \mathbb{R}$
4) $f_4 : t \longmapsto \dfrac{4t^3}{(t^4+5)^3}\,; I = \mathbb{R}$
5) $f_5 : x \longmapsto \cos(3x+1)\,; \mathrm{I} = \mathbb{R}$
6) $f_6 : u \longmapsto -\dfrac{1}{u^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}\,; I = \mathbb{R}_+^*$
7) $f_7 : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}\,; I = \mathbb{R}$
8) $f_8 : t \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,; \mathrm{I} = \mathbb{R}_+$
9) $f_9 : x \longmapsto \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\,; I = \mathbb{R}$

II. — Équations différentielles

1) Un exemple

Le carbone est naturellement présent dans les végétaux sous une forme stable (le carbone 12). La collision entre des particules cosmiques et des atomes d'azote présents dans l'atmosphère entraîne la formation d'une forme instable de carbone (le carbone 14). Tout au long de leur vie, lors de la photosynthèse, les végétaux absorbent des atomes de carbone 14 et, dans un végétal donné, le rapport entre la concentration de carbone 12 et de carbone 14 reste stable autour de 1,3%.

Lorsqu'un organisme végétal meurt, il n'absorbe plus de carbone 14 et, comme ce dernier est instable, il se désintègre en carbone 12 et sa concentration diminue. Si on note N cette concentration en fonction du temps alors la vitesse de désintégration N' est proportionnelle à N. Plus précisément, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N'(t) = 1{,}21 \cdot 10^{-4} N(t)$$

Ainsi, la fonction N vérifie une égalité qui la relie à sa dérivée. Ce type d'égalité s'appelle une équation différentielle.

Résoudre une telle équation signifie déterminer les fonctions N qui vérifie une telle égalité qu'on pourrait simplement écrire $N' = -1{,}21 \cdot 10^{-4} N$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$. Dans une telle équation, l'inconnue est donc une fonction.

2) Définition

Définition 11

Une équation différentielle est une égalité entre fonctions faisant intervenir une fonction et/ou certaines de ses dérivées sur une certain intervalle I. Dans une telle équation, l'inconnue est une fonction en général notée y.

Exemple 12.

1. L'égalité $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. Une solution de cette équation est la fonction exponentielle. Ce n'est cependant pas la seule. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto 5\mathrm{e}^x$ en est également une solution.
2. Si f est une fonction quelconque définie sur un intervalle I, l'égalité $y' = f$ sur I est une équation différentielle. Par définition, les solutions de cette équation sont les primitives de f sur I.

3. L'égalité $y'' = -y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle donc les fonctions sinus et cosinus sont solutions.

4. Si $f : x \longmapsto 4\mathrm{e}^{-x}$, l'égalité $y'' + y' + 4y = f$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle donc une solution est est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

5. L'égalité $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une équation différentielle dont une solution est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$.

Exercice 13. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \ln(x)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = f$ sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque 14.

1. Dans la pratique, on écrira parlera de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \dfrac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$. Il faut avoir conscience que c'est un abus de notation car $y'' + y' - 2y$ est une fonction alors que $\dfrac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ est un nombre.

2. Dans ce cours, on ne considère que des équations à coefficients constants mais rien n'empêche de considérer des équations différentielles dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions. Par exemple, on peut considérer l'équation différentielle $y' - xy = x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ dont une solution est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

3) L'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 15

Soit a un réel. Alors, les solutions de l'équation différentielle $(H) : y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{at}$ où C est une constante quelconque.

Exemple 16. Déterminer la fonction N dans l'exemple de la désintégration du carbone 14.

Corollaire 17

Soit a un réel non nul et b un réel quelconque. Alors, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

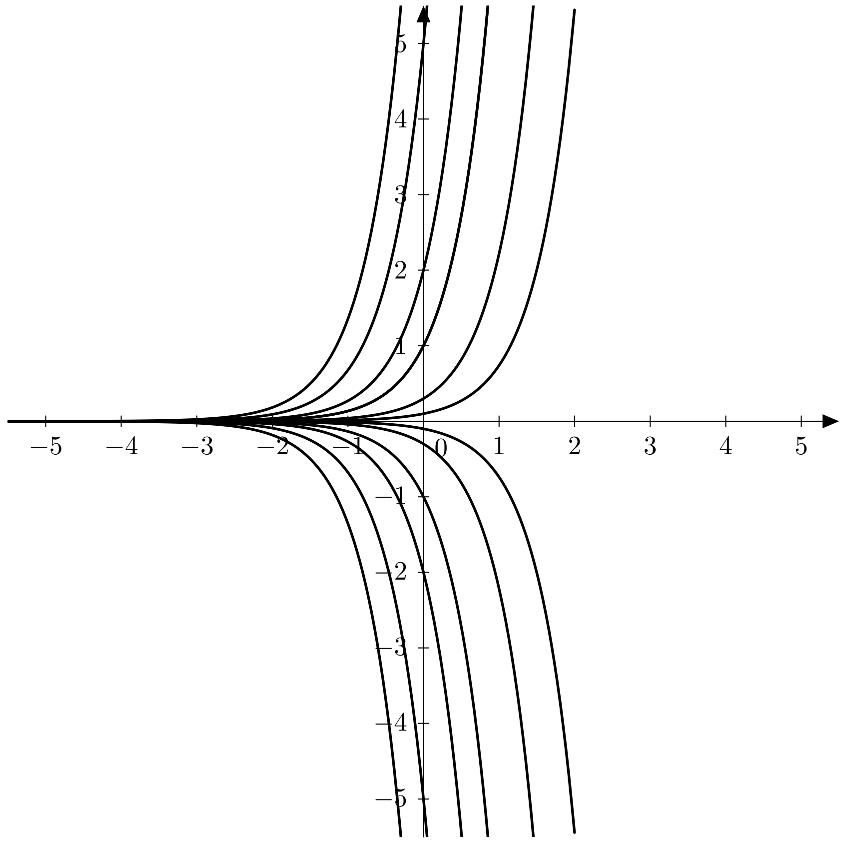
Exemple 18. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E).

2. Déterminer la solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Remarque 19. Il découle du corollaire précédent que, pour tout $(x_0\,;y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f de (E) tel que $f(x_0) = y_0$. Ceci implique en particulier que deux solutions différentes de (E) n'ont aucun point commun.

On obtient des courbes (appelées courbes intégrales) ayant l'allure suivante.



Exercice 20. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}$$

sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y$.
2. Montrer que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution de (E).
3. Montrer qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de (H).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Méthode 21 (hors programme)**.** L'exemple précédent peut se généraliser à toute équation différentielle de la forme $(E) : y' = ay + f$ où f est une fonction définie sur un intervalle I. On voit qu'on a besoin d'avoir une solution particulière g.

Dans le cadre du programme, cette fonction doit être donnée. On peut cependant se poser la question de la façon dont on peut la trouver.

Il existe pour cela une méthode appelée « méthode de variation de la constante ». On sait que les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{at}$ où C est une constante. On va chercher une solution de (E) sous la forme $g : t \longmapsto C(t)\mathrm{e}^{at}$ où C est une fonction dérivable sur I.

On a alors, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = C'(t)\mathrm{e}^{at} + C(t) \times a\mathrm{e}^{ay} = a \times C(t)\mathrm{e}^{at} + C'(t)\mathrm{e}^{at} = ag(t) + C'(t)\mathrm{e}^{at}$$

donc, pour que g soit solution de (E), il suffit que, pour tout $t \in I$, $C'(t)\mathrm{e}^{at} = f(t)$ i.e. $C'(t) = f(t)\mathrm{e}^{-at}$. Ainsi, pour que $g : t \longmapsto C(t)\mathrm{e}^{at}$ soit une solution particulière de (E), il suffit que C soit une primitive de $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}$. En appliquant ceci à l'exemple précédent, on voit que $x \longmapsto C(x)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de (E) si C est une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{2x} = 1$ donc $C : x \longmapsto x$ convient i.e. $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$.

Exemple 22. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + (2x - 3)\mathrm{e}^{x^2}$.