⧫ Chapitre 0 : Le raisonnement par récurrence

I. — Principe du raisonnement par récurrence

On considère une proposition P_n dépendant d'un **entier naturel** n. On souhaite montrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n. Pour cela, il suffit de :

- montrer que la proposition est vraie au rang 0 i.e. que lorsqu'on remplace n par 0 dans P_n alors on obtient une proposition qui est vraie. Cette étape est appelée *initialisation de la récurrence.*
- montrer que, pour tout entier naturel k, si la proposition P_k est vraie alors la proposition P_{k+1} est également vraie : c'est ce qu'on appelle *l'hérédité.*

Remarques

1. Il arrivera qu'on souhaite montrer que la proposition P_n n'est vraie qu'à partir d'un certain rang N. Dans ce cas, dans l'étape d'initialisation, on remplace 0 par N.

2. Le principe de raisonnement par récurrence est ce qu'on appelle un axiome, c'est-à-dire une « vérité première » qui sert de base à la théorie et qu'on admet sans chercher à la démontrer.

II. — Exemples d'application

Exemple 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Solution. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n > 0$ ».

Étant donné que $u_0 = 1 > 0$, la proposition P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_k > 0$ et, comme $k \in \mathbb{N}$, $k + 1 > 0$ donc $\frac{u_k}{k+1} > 0$ i.e. $u_{k+1} > 0$. Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie i.e. $u_n > 0$.

Exemple 2 [Exercice 3 *a)* de la fiche **Révision sur les suites réelles**]

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

Conjecturer et démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Solution. Le calcul des premiers termes donne $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + 2 \times 0 + 3 = 4$, $u_2 = 4 + 2 \times 1 + 3 = 9$, $u_3 = 9 + 2 \times 2 + 3 = 16$ et $u_4 = 16 + 2 \times 3 + 3 = 25$. On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^2$.

Montrons-le par récurrence. Pour cela, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n = (n + 1)^2$ ».

On a $u_0 = 1 = (0 + 1)^2$ donc P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_k = (k + 1)^2$ donc, par définition de la suite (u_n),

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2$$

donc $u_{k+1} = ((k+1)+1)^2$ donc P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie i.e. $u_n = (n+1)^2$.

Exemple 3. — Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

Solution. Considérons, pour tout entier $n \geqslant 4$, la proposition P_n : « $n^2 \leqslant 2^n$ ».

Étant donné que $4^2 = 16$ et $2^4 = 16$, on a $4^2 = 2^4$ donc P_4 est vraie.

Soit un entier $k \geqslant 4$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $k^2 \leqslant 2^k$. On doit montrer que P_{k+1} est vraie i.e. que $(k+1)^2 \leqslant 2^{k+1}$. Pour cela, on part de $k^2 \leqslant 2^k$ et on multiplie cette inégalité par $2 > 0$: on obtient $2k^2 \leqslant 2 \times 2^k$ i.e. $2k^2 \leqslant 2^{k+1}$. On n'obtient pas l'inégalité voulue mais on va montrer qu'on obtient en fait mieux c'est-à-dire que $2k^2 \geqslant (k+1)^2$. Pour montrer cette inégalité, on étudie le signe de

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1.$$

Considérons le polynôme du second degré $P(x) = x^2 - 2x - 1$. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$ donc $P(x)$ possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Comme la coefficient dominant de $P(x)$ est $a = 1 > 0$, $P(x)$ est positif pour tout $x \in]-\infty\,; x_1] \cup [x_2\,; +\infty[$ et négatif pour tout $x \in [x_1\,; x_2]$. Or, $k \geqslant k$ donc $k > x_2$ et ainsi $P(k) \geqslant 0$ donc $2k^2 \geqslant (k+1)^2$. On a donc montré que $2^{k+1} \geqslant 2k^2$ et $2k^2 \geqslant (k+1)^2$ donc $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$ i.e. P_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Remarques

1. La proposition P_n est, en fait, héréditaire à partir du rang $n = 3$ car $3 \geqslant x_2$ donc, si $k \geqslant 3$, $P(k) \geqslant 0$. Cependant, la propriété P_3 est fausse car $2^3 = 8 < 9 = 3^2$. On peut remarquer que P_0, P_1 et P_2 sont vraies donc P_n est en fait vraie pour tout entier $n \neq 3$.
2. On aurait pu montrer que $2k^2 \geqslant (k+1)^2$ de façon plus astucieuse. En effet, comme $k \geqslant 4$,

   $$2k^2 = k^2 + k^2 = k^2 + k \times k \geqslant k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k \geqslant k^2 + 2k + 8 \geqslant k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

   On aurait également pu utiliser la forme canonique : puisque $k \geqslant 4$,

   $$P(k) = k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 \geqslant 3^2 - 2 = 7 \geqslant 0.$$