⧫ Chapitre 3 : Limites et continuité

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère quelconque $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. De plus, si f est une fonction, on note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

I. Comportement au voisinage de $+\infty$

Dans tout ce paragraphe, on suppose que f est une fonction définie au voisinage de $+\infty$ i.e. qu'il existe un réel c tel que l'intervalle $]c\,;+\infty[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

1) Fonction convergeant en $+\infty$

Théorème et définition 1

On dit que f converge en $+\infty$ (ou que $f(x)$ converge lorsque x tend vers $+\infty$) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la limite de f en $+\infty$. On dit alors que f converge (ou tend) vers ℓ en $+\infty$ et on note alors

$$\ell = \lim_{+\infty} f \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Figure 1

Exemple 2. La fonction inverse tend vers 0 en $+\infty$.

Définition 3

Si f converge vers un réel ℓ en $+\infty$ alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote (horizontale) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) Fonction divergeant en $+\infty$

Définition 4

On dit qu'une fonction diverge en $+\infty$ si elle ne converge pas en $+\infty$.

Exemple 5. On admet que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ divergent en $+\infty$.

Définition 6

1. On dit que f tend (ou diverge) vers $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On dit que f tend (ou diverge) vers $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Figure 2

Propriété 7

1. Pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to +\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

II. Comportement au voisinage de $-\infty$

On peut reprendre l'étude précédente au voisinage de $-\infty$ pour une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $]-\infty\,; c[$ avec $c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse alors au comportement de $f(x)$ quand x devient grand par valeurs négatives.

On a les mêmes notions de convergence vers un réel, de divergence, de divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et d'asymptote (horizontale) au voisinage de $-\infty$.

Propriété 8

1. Pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to -\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ si k est pair et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ si k est impair.
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

III. Comportement au voisinage d'un réel a

Dans tout ce paragraphe, a est un réel et f est une fonction définie au voisinage de a i.e. il existe deux réels b et c avec $b < a < c$ tels que $]b\,; a[\cup]a\,; c[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$. Une telle fonction n'est donc pas nécessairement définie en a.

1) Fonction convergeant en a

Théorème et définition 9

On dit que f converge en a (ou que $f(x)$ converge lorsque x tend vers a) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a.

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la limite de f en a. On dit alors que f converge (ou tend) vers ℓ en a et on note

$$\ell = \lim_a f \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

.... Figure 3 ....

Propriété 10

Si f est une fonction de référence (fonction carrée, inverse, polynôme, fonction rationnelle, racine carrée, fonction exponentielle...) et si $a \in \mathcal{D}_f$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 11.

1. Déterminer la limite de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ quand x tend vers 2.
2. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en 0.

2) Fonction divergeant en a

Définition 12

1. On dit qu'une fonction diverge en a si elle ne converge pas en a.
2. On dit que f tend (ou diverge) vers $+\infty$ en a si, pour tout réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note
$$\lim_a f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$
3. On dit que f tend (ou diverge) vers $-\infty$ en a si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note
$$\lim_a f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

.... FIGURE 4 ....

Exemple 13. Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Définition 14

Si f diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a alors la droite Δ d'équation $x = a$ est appelée asymptote (verticale) à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Limite à droite et limite à gauche

Exemple 15. On s'intéresse au comportement de la fonction inverse au voisinage de 0. Lorsque x devient proche de 0, $\dfrac{1}{x}$ devient très grand par valeurs positives ou négatives suivant que x est positif ou négatif. Ainsi, la fonction inverse diverge sans avoir de limite en 0.

Cependant, si on considère cette même fonction en restreignant l'ensemble de définition à $]0\,;+\infty[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant positif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $+\infty$. On dit alors que $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et $+\infty$ est appelée la limite à droite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. De même, si on considère la fonction inverse restreinte à $]-\infty\,;0[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant négatif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $-\infty$. On dit alors que la $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures et $-\infty$ est appelée la limite à gauche de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition 16

Si la restriction de f à l'intervalle $]a\,;c[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a, on dit que f admet une limite à droite (ou par valeurs supérieures) en a et on note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

De même, si la restriction de f à l'intervalle $]b\,;a[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a, on dit que f admet une limite à gauche (ou par valeurs inférieures) en a et on note
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell.$$

Remarque 17.

1. **1.** Si, dans la définition précédente, au moins l'une des deux limites est infinie, on dira encore que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. **2.** Si f n'est pas définie en a et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

IV. Limites et opérations

1) Opérations algébriques

Dans tous les tableaux suivants, f et g sont deux fonctions et ℓ et ℓ' sont deux réels. Les règles suivantes sont valables lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers un réel a (éventuellement à droite ou à gauche).

1. Limite d'une somme

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x)+g(x)$ tend vers						

Remarque. L'étude de $f(x) - g(x)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant la différence sous la forme $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$

2. Limite d'un produit

si $f(x)$ tend vers	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors $f(x)g(x)$ tend vers									

Remarque. L'étude de $kg(x)$ où k est un réel est un cas particulier de ce qui précède en prenant pour f la fonction constante égale à k.

3. Limite d'un quotient

— Cas où $g(x)$ ne tend pas vers 0

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et si $g(x)$ tend vers	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers							

— Cas où $g(x)$ tend vers 0

si $f(x)$ tend vers	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers									

Exemple 18. Dans chaque cas, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1) $f(x) = x^2 + x + 1,\ a = +\infty$ **2)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1},\ a = -\infty$ **3)** $f(x) = \dfrac{2x-7}{x-3},\ a = 3$

4) $f(x) = \dfrac{4-x}{(x-2)^2},\ a = 2$ **5)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x},\ a = +\infty$ **6)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2},\ a = 0$

7) $f(x) = (x+3)\sqrt{x},\ a = +\infty$ **8)** $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1},\ a = +\infty$ **9)** $f(x) = x^2 - x + 1,\ a = -\infty$

2) Règles opératoires

On a pour les fonctions les mêmes règles opératoires que pour les suites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Ainsi, si f est une fonction polynôme en x (resp. une fonction rationnelle en x) alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré (resp. du quotient des termes de plus hauts degrés) lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ces règles ne sont valables qu'AUX VOISINAGES DE $+\infty$ et $-\infty$.

Exemple 19. Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 - x^2 + 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^4 - x^2 + 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{3x^4 + x^2 + 1} \qquad \lim_{x\to 0} x^4 - x^2 + 1.$$

3) Composition

Définition 20

On considère deux fonctions g et h définies respectivement sur $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$. On suppose, de plus, que, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) \in \mathcal{D}_h$. On définit la fonction f sur $\mathcal{D}_g$ par $f(x) = h(g(x))$. La fonction f est appelée la composée de g suivie de h. On note alors $f = h \circ g$ (ce qui se lit « f égale h rond g »).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"'] \arrow[rr, mapsto, bend right, "f"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "h"'] & h(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple 21. La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}}$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction racine carrée.

Propriété 22

Les lettres a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère une fonction g définie au voisinage de a et une fonction h définie au voisinage de b. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, que $\lim\limits_{X\to b} h(X) = c$ et que la composée f de g suivie de h est définie au voisinage de a. Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Exemple 23. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2+3}}$ et de $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

V. Théorèmes de comparaison

1) Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

Théorème 24 (Théorème d'encadrement)

La lettre a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère trois fonctions f, d et g définies au voisinage de a. On suppose que les fonctions d et g <u>convergent</u> en a vers un <u>même</u> réel ℓ et que pour tout x dans un voisinage de a, $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$. Alors, la fonction f <u>converge</u> en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

.... FIGURE 5 ....

Exemple 25. Soit f la fonction définie, pour tout $x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Étudier le comportement de f au voisinage de 0.

2) Théorème de comparaison

Théorème 26 (Théorème de comparaison)

La lettre a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère trois fonctions f, d et g définies au voisinage de a.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout x dans un voisinage de a, $g(x) \leq f(x)$ alors la fonction f diverge en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

2. Si $\lim\limits_{x\to a} d(x) = -\infty$ et si, pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) \leq d(x)$ alors la fonction f diverge en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

.... Figure 6 ....

Exemple 27. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2+\cos(x)}$.

Étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3) Limites et fonction exponentielle

Lemme 28

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

Propriété 29

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Propriété 30. (croissances comparées)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$.

Exemple 31. — Déterminer les limites suivantes.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x \qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \qquad 3)\ \lim_{x\to-\infty} (x^2-3)\mathrm{e}^x \qquad 4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x}.$$

Propriété 32

$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.$$

Exemple 33. Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{2x}$ lorsque x tend vers 0.

VI. Continuité

1) Définition

Définition 34

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

1. f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. f est continue sur I si f est continue en tout $a \in I$.

. . . . Figure 7 . . . .

Remarque 35.

1. Si a est une borne de I, on ne considère que la limite à droite ou à gauche.
2. Dire que f est continue en $a \in I$ est équivalent à dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.
3. La question de la continuité d'une fonction ne se pose qu'en un réel a en lequel la fonction est définie.
4. Si f n'est pas continue en $a \in I$, on dit que f est discontinue en a.

Interprétation graphique. Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ se traduit par le fait qu'on peut « tracer la courbe sans lever le crayon ». Autrement dit, la continuité de f se traduit par le fait que la courbe $\mathcal{C}_f$ ne présente pas de saut aux abscisses en lesquelles f est définie.

Exemple 36. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue en 0 d'après l'exemple 25.

La fonction partie entière

On définit la fonction partie entière, notée E, de la manière suivante : pour tout réel x, $E(x)$ est l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$.

1. Déterminer $E(2)$, $E(-3)$, $E(1{,}5)$, $E(-4{,}2)$, $E(0)$, $E(-\sqrt{2})$ et $E(\pi)$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-1\,;3]$.
3. La fonction E est-elle continue sur $[-1\,;3]$? sur $[0\,;1]$? sur $[0\,;1[$? sur $]0\,;1]$?

2) Lien avec la dérivabilité

Théorème 37

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Corollaire 38

On en déduit que la fonction carré, la fonction inverse, la fonction cube, les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction exponentielle ainsi que toute fonction obtenue à partir de celles-ci par somme, différence, produit et quotient sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Remarque 39. Ceci démontre a posteriori la propriété 10.

Exemple 40.

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 5x - 1$ est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$ est une quotient de fonctions continues défini sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Cas des fonctions racine carrée et valeur absolue

On peut démontrer que la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues en 0 mais qu'elles ne sont pas dérivables en 0 (voir le chapitre 5). La réciproque du théorème 37 est donc fausse.

3) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 41 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a < b$ deux réels appartenant à I. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

. . . . Figure 8 . . . .

Corollaire 42

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $a < b$ deux réels appartenant à I. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique un réel c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Convention. Dans un tableau de variation, une flèche oblique traduit la continuité et la stricte monotonie.

Remarque 43. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et si $a < b$ sont deux réels appartenant à I tels que $f(a) \times f(b) < 0$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 44. Démontrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$ puis montrer que $1{,}21 < \alpha < 1{,}22$.

Extension du théorème des valeurs intermédiaires et de son corollaire

Le théorème 41 et le corollaire 42 s'étendent aux cas où a et/ou b n'appartient pas à I mais est une borne de I. Il suffit alors dans les énoncés de remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ (ces limites étant éventuellement respectivement des limites à droite et à gauche).

Exemple 45. Soit p et q deux entiers tels que $p > 0$. Démontrer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.