

◆ Chapitre 15 : Produit scalaire dans l'espace

I. — Définition

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$



Par définition, le produit scalaire de deux **vecteurs** est un **nombre réel** (positif, négatif ou nul).

Remarque 2.

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puisque $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, on a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: on dit que le produit scalaire est commutatif.
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si A, B et C sont trois points de l'espace alors il existe (au moins) un plan $\mathcal{P}$ de l'espace contenant les points A, B et C (et ce plan est unique si A, B et C ne sont pas alignés). La norme dans ce plan est la même que la norme dans l'espace donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs de l'espace est le même que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Or, dans le plan $\mathcal{P}$, on peut parler de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Ainsi, on peut se ramener à l'expression du produit scalaire vu dans le plan :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

En particulier, on en déduit, comme dans le plan, les propriétés suivantes à connaître :

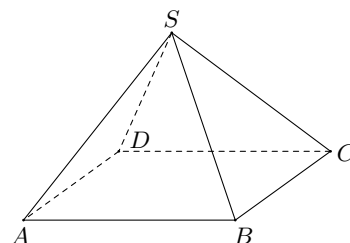
Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (i.e. le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AB) passant par C) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et donc, en particulier, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$.

Exemple 4. — On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et dont toutes les arêtes ont la même longueur a . Déterminer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$;
d) $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$; e) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$; f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.



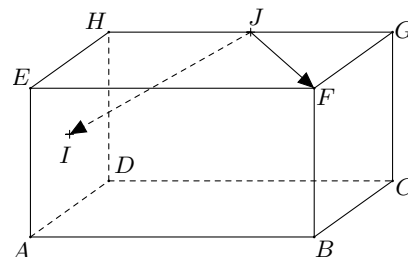
Propriété 5

On suppose que l'espace est muni d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple 6. — Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ et $AB = 2$. On note I le centre du carré $ADHE$ et J le milieu de $[GH]$.

Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$. En déduire une valeur arrondie au dixième de degré près de $\widehat{IJF}$.



Propriété 7. — Règles de calcul

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel. Alors :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Application 8. — Soit A , B , C et D quatre points de l'espace tels que $D \notin (AB)$. Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) dans le plan (ABD) . Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$.

Propriété 9. — Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

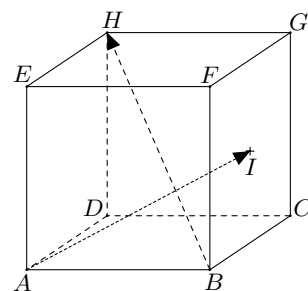
II. — Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de vecteurs et de droites

Définition 10

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 11. — On considère un cube $ABCDEFGH$ et on note I le centre du carré $BCGF$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.



Propriété 12

Soit Δ et Δ' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$. Alors, Δ et Δ' sont orthogonales si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux.

Propriété 13

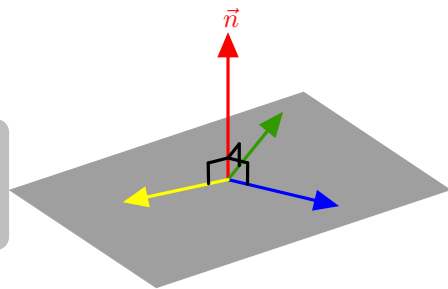
Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

2) Vecteur normal à un plan

Définition 14

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

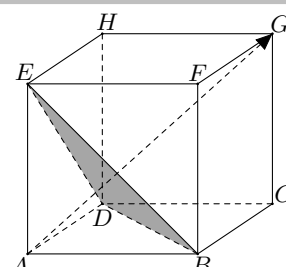
Remarque 15. — Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ revient à dire que $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.



Propriété 16

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

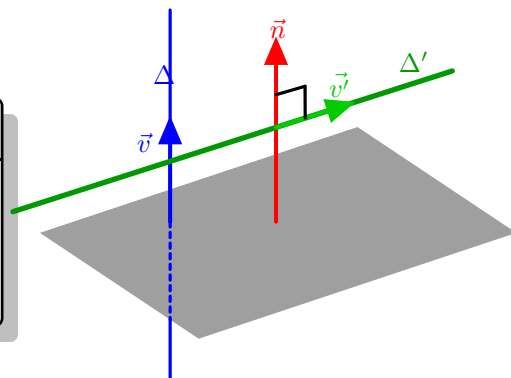
Exemple 17. — On considère un cube $ABCDEFGH$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) .



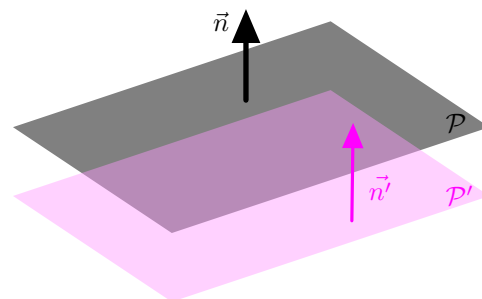
Propriété 18

Soit $\mathcal{P}$ un plan et Δ une droite de l'espace. On suppose que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ . Alors,

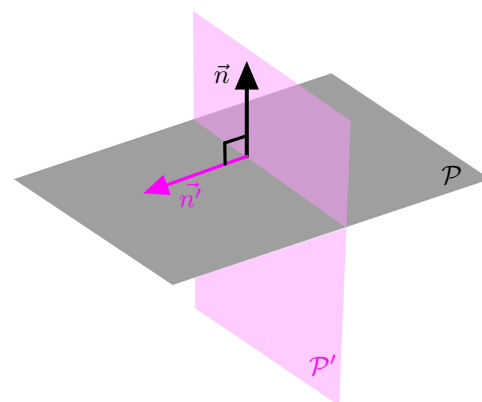
1. Δ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}$;
2. Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$.

**Propriété 19**

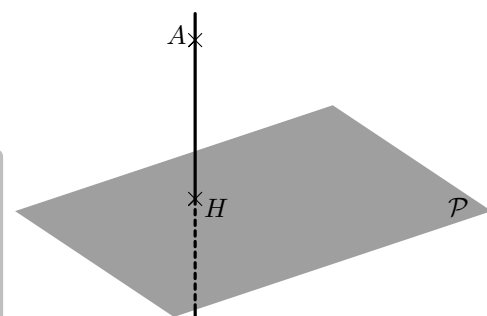
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Alors, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

**Définition 20**

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.

**Propriété 21**

Soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une droite et une seule passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Cette droite coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point H appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

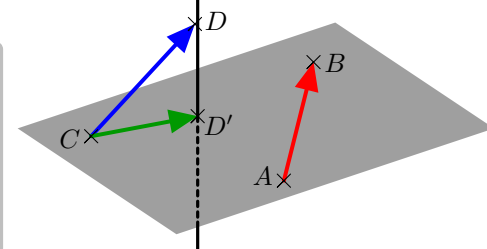


Remarque 22. — Si $A \in \mathcal{P}$ alors $H = A$ i.e. A est son propre projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

Propriété 23

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace. On note D' le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) . Alors,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD'}.$$



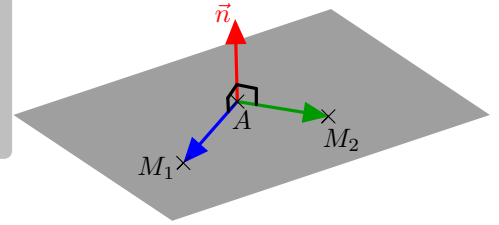
Remarque 24. — L'intérêt de la proposition précédente réside dans le fait que D' appartient au plan (ABC) donc les points A, B, C et D' sont coplanaires.

III. — Équations cartésiennes de plans et de sphères de l'espace

1) Équation cartésienne d'un plan

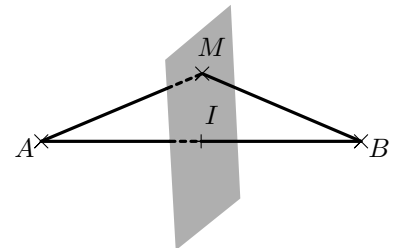
Propriété 25

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Alors, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est l'unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Propriété 26

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Alors, l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B (i.e. tels que $AM = BM$) est un plan appelé plan médiateur de $[AB]$.



Attention à l'erreur fréquente qui consiste à croire de l'ensemble des points équidistants de A et B est une droite. C'est vrai dans le plan (et cette droite est la médiatrice de $[AB]$) mais pas dans l'espace.

Propriété 27

On munit l'espace d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace ayant pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
2. Réciproquement, étant donné des réels a, b, c et d avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

Remarque 28. — Une équation cartésienne d'un plan n'est pas unique. Par exemple, si $x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ alors $2x - 4y + 2z + 6 = 0$ ou $-x + 2y - z - 3 = 0$ sont également des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$. En revanche, on peut affirmer que deux équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnelles (essentiellement car deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires...)

Exemple 29. — On considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$ et $C(4; 1; -1)$. Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne de (ABC) .

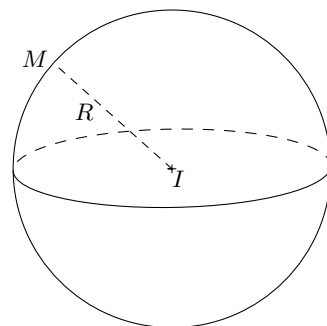


Dans l'espace, $y = 2x + 1$ est l'équation cartésienne d'un plan car cette équation équivaut à $2x - y + 0z + 1 = 0$ qui est bien de la forme précédente avec $a = 2, b = -1, c = 0$ et $d = 1$.

2) Sphères de l'espace

Définition 30

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = R$.



Propriété 31

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si I est le point de coordonnées $(x_I; y_I; z_I)$ et si R est un réel strictement positif alors un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon R si et seulement si $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$.

Une telle équation est appelée équation cartésienne (réduite) de $\mathcal{S}$.

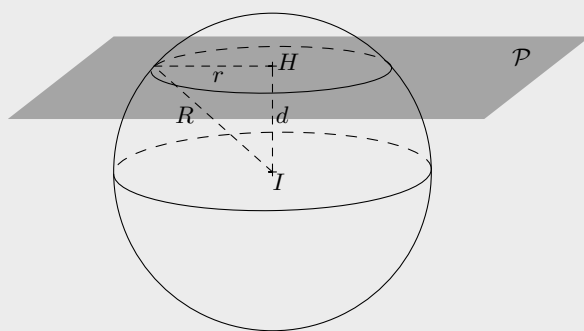
Exemple 32. — On considère les points $A(-1; 3; 4)$ et $B(2; -6; 0)$ de l'espace. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$.

Application 33. — Soit A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

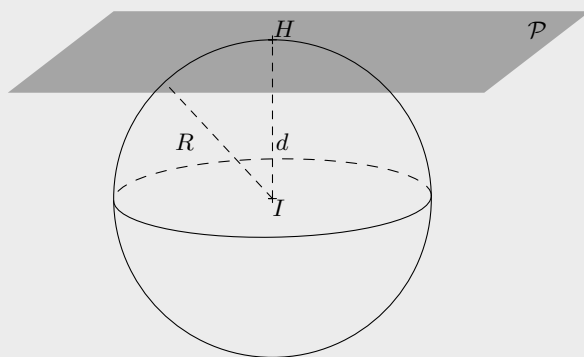
Propriété 34

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\mathcal{S}$ une sphère de centre I et de rayon R . On note H le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{P}$ et $d = IH$ la distance de I au plan $\mathcal{P}$. Alors, l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ est :

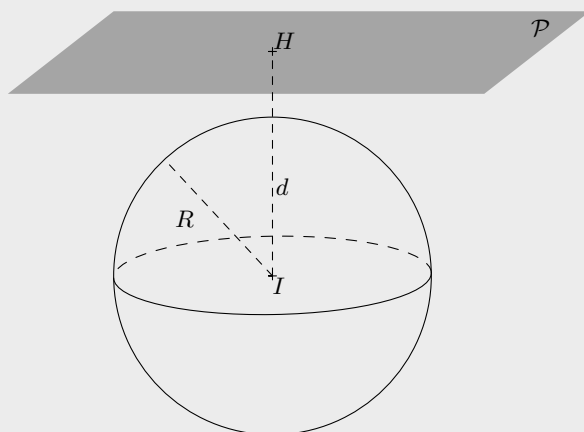
- un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$;



- le point H si $d = R$;



- vide si $d > R$.



Exemple 35. — Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $I(1; -2; 0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$. Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon 3.