

◆ Chapitre 6 : Dérivation

Dans tout le chapitre, E désigne un ensemble qui est soit un intervalle soit une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

I. — Nombre dérivé

Définition 1

Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$. On dit que :

1. f est dérivable en a si le taux de variation $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.
2. f est dérivable sur E si f est dérivable en tout $a \in E$.

Remarque 2.

1. Si a est une borne de E , on ne considère que la limite à droite ou à gauche en a .
2. Si f est dérivable en a alors, par définition, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ce qui peut aussi s'écrire, en posant $x = a + h$, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.
3. Comme $t(h)$ n'est pas défini pour $h = 0$, $t(h)$ admet une limite en 0 si et seulement s'il admet la même limite à droite et à gauche. Ainsi, si $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$.

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I . Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f dans un repère admet une tangente T_a au point d'abscisse a et une équation de T_a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque 4. — Si a est une borne de I , on parle de demi-tangente. Par exemple, la courbe de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ admet une demi-tangente horizontale à l'origine car $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{h} = 0$.

La notion de demi-tangente intervient aussi lorsque le taux de variation admet une limite finie différente à droite et à gauche. C'est le cas, par exemple, pour la fonction valeur absolue car $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{h}{h} = 1$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{-h}{h} = -1$ donc la courbe de la fonction valeur absolue admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche à l'origine de coefficients directeurs respectifs 1 et -1 .

II. — Fonction dérivée

1) Définitions

Définition 5

Soit f une fonction définie sur E . Si f est dérivable sur E , on définit la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f comme la fonction qui à tout $a \in E$ associe le nombre $f'(a)$. On note cette fonction f' .

Remarque 6. — La notation f' est la notation standard en mathématiques pour la fonction dérivée. Il en existe cependant d'autres, notamment la notation $\frac{df}{dx}$. Celle-ci a l'inconvénient d'être lourde mais l'avantage d'être plus précise puisqu'elle explicite la variable de dérivation. Elle est très utilisée en mathématiques et

en physique. Par exemple, si v est la vitesse exprimée en fonction du temps t , $\frac{dv}{dt}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire l'accélération.

Définition 7

Soit f une fonction définie sur E .

1. Si f est dérivable sur E et si f' est elle-même dérivable sur E , on dit que f est deux fois dérivable sur E et la dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f . On la note f'' (lire « f seconde ») ou $f^{(2)}$.
2. Par récurrence, on définit – si elle existe – la dérivée n -ième (ou dérivée d'ordre n) de f sur E , notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$. Par convention, $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.
3. Si f admet des dérivées de tout ordre sur E , on dit que f est indéfiniment dérivable sur E .

2) Dérivées de fonctions usuelles

On désigne par C , m et p des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

Si $f(x) =$	alors $f'(x) =$	pour tout x dans
C	0	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty [$

Remarque 8. — Toutes les fonctions de références sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs SAUF la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 car, pour tout $h \neq 0$, $\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. Cela dit, la courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en 0.

3) Dérivée et opérations algébriques

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur E et si k est un réel alors les fonctions $u + v$, ku , uv , $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et

$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
----------------------	---------------	---------------------	---	---

4) Liens entre dérivée et variations

Théorème 9 (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I .
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I .
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

Exemple 10. — La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. — On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis construire son tableau de variation (avec les limites).
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Étudier la position relative de T_1 et de $\mathcal{C}_f$.
5. Montrer que la droite T_1 est perpendiculaire à la tangente T_{-1} à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 .

Exercice 12. — Soit la fonction $f : x \mapsto x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' et f'' .
2. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. — Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ par et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T .

5) Dérivée d'une fonction composée

Propriété 14 (admise)

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemple 15. Dérivabilité et calcul de la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ et $g := x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$.

Propriété 16 (admise)

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

Si, de plus, u ne s'annule pas sur I alors, pour tout entier strictement négatif m , u^m est dérivable sur I et

$$(u^m)' = mu'u^{m-1}.$$

Remarque 17. — Si $m < 0$ alors $n = -m > 0$ et la formule précédente peut se réécrire $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$.

Exemple 18. — Étudier la dérivabilité et calculer de la dérivée de $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)^{2012}$, $g : x \mapsto \frac{1}{(3x^2 + 1)^5}$ et $h : x \mapsto \frac{1}{(x + 3)^4}$.

Propriété 19 (admise)

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit a et b deux réels et J un intervalle tel que, pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$. Alors, la fonction f définie sur J par $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable sur J et

$$\forall x \in J \quad f'(x) = au'(ax + b).$$

UN CAS PARTICULIER IMPORTANT. — Soit I un intervalle centré en 0 et f une fonction définie sur I . Alors, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = -f'(-x)$.

Théorème 20 (admis et hors-programme)

Soit g une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors la composée $g \circ u$ est dérivable sur I et

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$$