

◆ Chapitre 5 : Limites et continuité

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère quelconque $(O; \vec{i}, \vec{j})$. De plus, si f est une fonction, on note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Tous les théorèmes et les propriétés de ce chapitre sont admis à l'exception du théorème 31 et du corollaire 35.

I. — Comportement au voisinage de $+\infty$

Dans tout ce paragraphe, on suppose que f est une fonction définie au voisinage de $+\infty$ i.e. qu'il existe un réel c tel que l'intervalle $]c; +\infty[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

1) Fonction convergeant en $+\infty$

Théorème et définition 1

On dit que f converge en $+\infty$ (ou que $f(x)$ converge lorsque x tend vers $+\infty$) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la limite de f en $+\infty$. On dit alors que f converge (ou tend) vers ℓ en $+\infty$ et on note alors

$$\ell = \lim_{+\infty} f \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

..... FIGURE 1

Exemple 2. — La fonction inverse tend vers 0 en $+\infty$.

Définition 3

Si f converge vers un réel ℓ en $+\infty$ alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote (horizontale) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) Fonction divergeant en $+\infty$

Définition 4

On dit qu'une fonction diverge en $+\infty$ si elle ne converge pas en $+\infty$.

Exemple 5. — On admet que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ divergent en $+\infty$.

Définition 6

1. On dit que f tend (ou diverge) vers $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On dit que f tend (ou diverge) vers $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A , l'intervalle $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

..... FIGURE 2

Propriété 7

1. Pour tout réel a , $\lim_{x \rightarrow +\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$.
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

II. — Comportement au voisinage de $-\infty$

On peut reprendre l'étude précédente au voisinage de $-\infty$ pour une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $]-\infty; c[$ avec $c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse alors au comportement de $f(x)$ quand x devient grand par valeurs négatives.

On a les mêmes notions de convergence vers un réel, de divergence, de divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et d'asymptote (horizontale) au voisinage de $-\infty$.

Propriété 8

1. Pour tout réel a , $\lim_{x \rightarrow -\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ si k est pair et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ si k est impair.
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

III. — Comportement au voisinage d'un réel a

Dans tout ce paragraphe, a est un réel et f est une fonction définie au voisinage de a i.e. il existe deux réels b et c avec $b < a < c$ tels que $]b; a[\cup]a; c[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$. Une telle fonction n'est donc pas nécessairement définie en a .

1) Fonction convergeant en a

Théorème et définition 9

On dit que f converge en a (ou que $f(x)$ converge lorsque x tend vers a) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a .

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la limite de f en a . On dit alors que f converge (ou tend) vers ℓ en a et on note

$$\ell = \lim_a f \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

..... FIGURE 3

Propriété 10

Si f est une fonction de référence (polynôme, fonction rationnelle, racine carrée,...) et si $a \in \mathcal{D}_f$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple 11. — Déterminer la limite de $f : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ quand x tend vers 2.

2) Fonction divergeant en a

Définition 12

1. On dit qu'une fonction diverge en a si elle ne converge pas en a .
2. On dit que f tend (ou diverge) vers $+\infty$ en a si, pour tout réel A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a . Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note

$$\lim_a f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

3. On dit que f tend (ou diverge) vers $-\infty$ en a si, pour tout réel A , l'intervalle $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a . Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note

$$\lim_a f = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

..... FIGURE 4

Exemple 13. — Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Définition 14

Si f diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a alors la droite Δ d'équation $x = a$ est appelée asymptote (verticale) à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Limite à droite et limite à gauche

Exemple 15. — On s'intéresse au comportement de la fonction inverse au voisinage de 0. Lorsque x devient proche de 0, $\frac{1}{x}$ devient très grand par valeurs positives ou négatives suivant que x est positif ou négatif. Ainsi, la fonction inverse diverge sans avoir de limite en 0.

Cependant, si on considère cette même fonction en restreignant l'ensemble de définition à $]0; +\infty[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant positif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $+\infty$. On dit alors que $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et $+\infty$ est appelée la limite à droite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. De même, si on considère la fonction inverse restreinte à $]-\infty; 0[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant négatif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $-\infty$. On dit alors que $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures et $-\infty$ est appelée la limite à gauche de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition 16

Si la restriction de f à l'intervalle $]a; c[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a , on dit que f admet une limite à droite (ou par valeurs supérieures) en a et on note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

De même, si la restriction de f à l'intervalle $]b; a[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a , on dit que f admet une limite à gauche (ou par valeurs inférieures) en a et on note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

2) Règles opératoires

On a pour les fonctions les mêmes règles opératoires que pour les suites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Ainsi, si f est une fonction polynôme en x (resp. une fonction rationnelle en x) alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré (resp. du quotient des termes de plus hauts degrés) lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

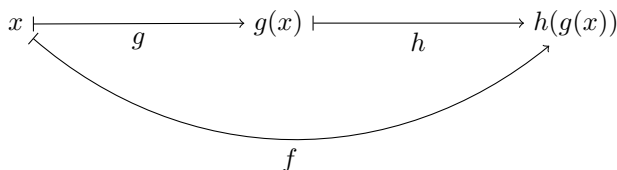


Ces règles ne sont valables qu'AUX VOISINAGES DE $+\infty$ et $-\infty$.

3) Composition

Définition 18

On considère deux fonctions g et h définies respectivement sur $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$. On suppose, de plus, que, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) \in \mathcal{D}_h$. On définit la fonction f sur $\mathcal{D}_g$ par $f(x) = h(g(x))$. La fonction f est appelée la composée de g suivie de h . On note alors $f = h \circ g$ (ce qui se lit « f égale h rond g »).



Exemple 19. — La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}}$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction racine carrée.

Propriété 20

Les lettres a , b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère une fonction g définie au voisinage de a et une fonction h définie au voisinage de b . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, que $\lim_{X \rightarrow b} h(X) = c$ et que la composée f de g suivie de h est définie au voisinage de a . Alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Exemple 21. — Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3}}$.

Propriété 22

Les lettres a et b désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère une fonction g définie au voisinage de a et une suite (v_n) . On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$, que $\lim_{X \rightarrow a} g(X) = b$ et que la suite $(g(v_n))$ est définie à partir d'un certain rang. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(v_n) = b$.

Exemple 23. — Déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{9^n + 1}{3^n + 2}$.

V. — Théorèmes de comparaison

1) Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

Théorème 24 (Théorème d'encadrement)

La lettre a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère trois fonctions f , d et g définies au voisinage de a . On suppose que les fonctions d et g convergent en a vers un même réel ℓ et que pour tout x dans un voisinage de a , $g(x) \leq f(x) \leq d(x)$. Alors, la fonction f converge en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple 25. — Soit f la fonction définie, pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Étudier le comportement de f au voisinage de 0.

2) Théorème de comparaison

Théorème 26 (Théorème de comparaison)

La lettre a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère trois fonctions f , d et g définies au voisinage de a .

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout x dans un voisinage de a , $g(x) \leq f(x)$ alors la fonction f diverge en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = -\infty$ et si, pour tout x dans un voisinage de a , $f(x) \leq d(x)$ alors la fonction f diverge en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemple 27. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2 + \cos(x)}$.

Étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

VI. — Continuité

1) Définition

Définition 28

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que

1. f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. f est continue sur I si f est continue en tout $a \in I$.

Remarque 29.

1. Si a est une borne de I , on ne considère que la limite à droite ou à gauche.
2. Dire que f est continue en $a \in I$ est équivalent à dire que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.
3. La question de la continuité d'une fonction ne se pose qu'en un réel a en lequel la fonction est définie.
4. Si f n'est pas continue en $a \in I$, on dit que f est discontinue en a .

Interprétation graphique. — Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ se traduit par le fait qu'on peut « tracer la courbe sans lever le crayon ». Autrement dit, la continuité de f se traduit par le fait que la courbe $\mathcal{C}_f$ ne présente pas de saut aux abscisses en lesquelles f est définie.

Exemple 30. — La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue en 0 d'après l'exemple 25.

La fonction partie entière

On définit la fonction partie entière, notée E , de la manière suivante : pour tout réel x , $E(x)$ est l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$.

1. Déterminer $E(2)$, $E(-3)$, $E(1,5)$, $E(-4,2)$, $E(0)$, $E(-\sqrt{2})$ et $E(\pi)$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-1; 3]$.
3. La fonction E est-elle continue sur $[-1; 3]$? sur $[0; 1]$? sur $[0; 1[$? sur $]0; 1]$?

2) Lien avec la dérivabilité

Théorème 31

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Corollaire 32

Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition.

Cas des fonctions racine carrée et valeur absolue

Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0 (voir le chapitre 6). La réciproque du théorème 31 est donc fausse.

3) Lien avec les suites récurrentes

Théorème 33

On suppose que (u_n) est une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction. On suppose, de plus, que (u_n) converge vers un réel ℓ .

Si f est continue en ℓ (ou sur un intervalle contenant ℓ) alors $f(\ell) = \ell$.

4) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 34 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a < b$ deux réels appartenant à I . Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

..... FIGURE 8

Corollaire 35

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $a < b$ deux réels appartenant à I . Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Convention. — Dans un tableau de variation, une flèche oblique traduit la continuité et la stricte monotonie.

Remarque 36. — Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et si $a < b$ sont deux réels appartenant à I tels que $f(a) \times f(b) < 0$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 37. — Démontrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$ puis montrer que $1,21 < \alpha < 1,22$.

Extension du théorème des valeurs intermédiaires et de son corollaire

Le théorème 34 et le corollaire 35 s'étendent aux cas où a et/ou b n'appartient pas à I mais est une borne de I . Il suffit alors dans les énoncés de remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et/ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ (ces limites étant éventuellement respectivement des limites à droite et à gauche).

Exemple 38. — Soit p et q deux entiers tels que $p > 0$. Démontrer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.