

◆ Chapitre 12 : Calcul vectoriel dans l'espace

Le but du chapitre est d'étendre à l'espace les notions vectorielles vues dans le plan en seconde et en première.

I. — Vecteurs de l'espace

1) Définition

Définition 1

Étant donnés deux points distincts A et B de l'espace, on caractérise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

- sa *direction* : la droite (AB) (ou toute droite parallèle à (AB)) ;
- son *sens* : le sens de A vers B ;
- sa *norme*, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: la longueur AB.

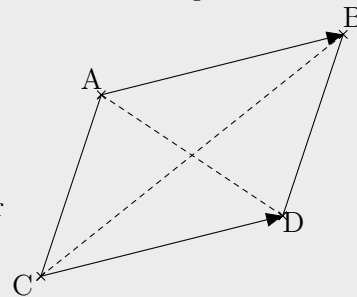
Définition 2

On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Théorème 3

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs de l'espace. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ;
2. ABDC est un parallélogramme ;
3. les segments [AD] et [BC] ont même milieu ;
4. le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



VOCABULAIRE

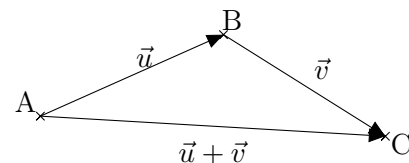
1. Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on dit aussi qu'ils sont des représentants d'un même vecteur qu'on peut noter avec une seule lettre (la plupart du temps $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.)
2. Si A est un point de l'espace, on convient que $\overrightarrow{AA}$ est un représentant d'un vecteur particulier appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$. Par convention, il n'a ni direction ni sens mais une norme égale à 0.

2) Opérations sur les vecteurs

a) Somme de vecteurs

Définition 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant de $\vec{u}$ et on note C le point tel que $\overrightarrow{BC}$ soit un représentant de $\vec{v}$. Alors, par définition, $\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$.



Propriété 5 (Relation de Chasles)

Si A, B et C sont trois points quelconques de l'espace alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

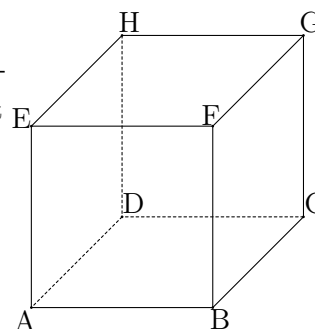
Remarque 6. — On étend la définition 4 à trois vecteurs en posant, par définition, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. On définit ainsi, par récurrence, la somme de n vecteurs de l'espace.

Propriété 7 (Règle du parallélogramme)

Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Exemple 8. — On considère un cube ABCDEFGH. Montrer que le quadrilatère ABGH est un parallélogramme et exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.

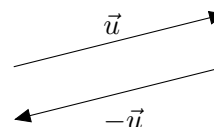
.....



b) Différence de vecteurs

Définition 9

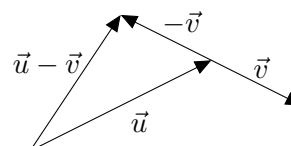
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. On définit l'opposé de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, comme le vecteur ayant même direction et même norme que $\vec{u}$ mais ayant le sens contraire de celui de $\vec{u}$.



Remarque 10. — On convient que $-\vec{0} = \vec{0}$.

Définition 11

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ par : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Exemple 12. — Si A, B et C sont trois points de l'espace alors $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \dots\dots\dots$

c) Produit par un réel

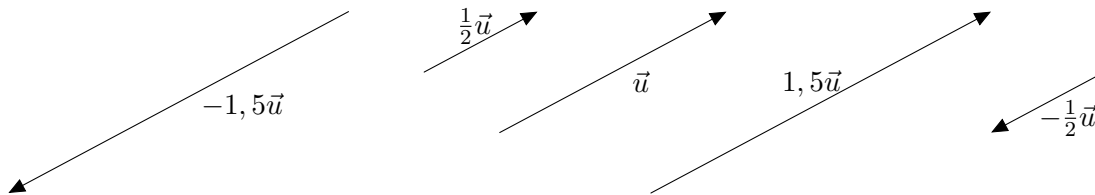
Définition 13

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. On définit le vecteur $k\vec{u}$ comme le vecteur ayant :

- même direction que $\vec{u}$;
- même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et sens contraire de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$;
- une norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$.

On convient, par ailleurs, que, pour tout réel k , $k\vec{0} = \vec{0}$ et que, pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 14.



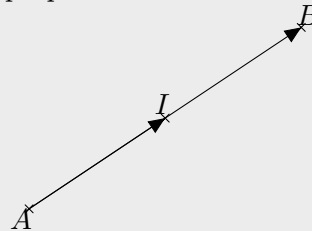
Remarque 15.

1. Si $k = -1$, on retrouve la définition de l'opposé de $\vec{u}$.
2. Par définition, $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 16

Soit A, B et I trois points de l'espace. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. I est le milieu de [AB] ;
2. $\vec{AI} = \vec{IB}$;
3. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$;
4. $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.



d) Règles de calcul sur les vecteurs

Les règles de calcul sur les vecteurs sont essentiellement les mêmes que celles sur les nombres réels. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels k et k' :

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ [associativité de la somme]
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ [commutativité de la somme]
3. $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ [$\vec{0}$ est un élément neutre pour l'addition]
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$ [$-\vec{u}$ est l'opposé de $\vec{u}$]
5. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ [distributivité à droite du produit sur la somme]
6. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ [distributivité à gauche du produit sur la somme]
7. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$.

3) Colinéarité et coplanarité

a) Vecteurs colinéaires

Définition 17

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- $\vec{u} = \vec{0}$;
- (ou) il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires sont dits non colinéaires ou (linéairement) indépendants.

Remarque 18.

1. Par définition, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$.
2. Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires équivaut à dire que, pour tous réels a et b , $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $a = b = 0$.

Théorème 19 (Caractérisation de l'alignement et du parallélisme)

Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 20. — On reprend le cube de l'exemple 8. On note K le centre de gravité du triangle AHG. Démontrer que les points B, K et H sont alignés.

Remarque 21. — Dans la pratique, on utilisera très souvent une conséquence du théorème précédent : trois points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. De plus, on peut alors dire que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

b) Vecteurs coplanaires

Définition 22

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

1. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
2. (ou) il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit alors que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

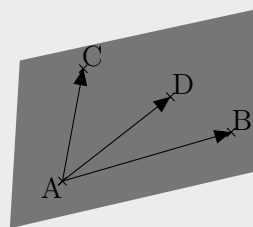
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, on dit qu'ils sont non coplanaires ou (linéairement) indépendants.

Remarque 23.

1. Si deux des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. La plupart du temps, on montrera que trois vecteurs sont coplanaires en exprimant l'un en fonction des deux autres. On peut cependant remarquer que dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires équivaut à dire que, pour tous réels a , b et c , $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ si et seulement si $a = b = c = 0$.

Théorème 24

Quatre points A, B, C et D de l'espace appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.



Exemple 25. — On reprend les notations de l'exemple 20. On note I le milieu de [HG]. Démontrer que les points I, G, K et B sont coplanaires.

Corollaire 26

Soit A un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont des réels quelconques est un plan P . On dit que P est le plan passant A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit également que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P . (On dit aussi que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P .)

Exemple 27. — Si on reprend le cube de l'exemple 8, on peut dire que (EFG) est le plan passant par E et dirigé par $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$. Remarquons qu'on peut tout aussi bien dire que (EFG) est le plan passant par H et dirigé par $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

Propriété 28

1. Une droite D de l'espace est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de D est coplanaire à deux vecteurs d'une base de P .
2. Deux plans de l'espace sont parallèles si et seulement si une base de l'un est une base de l'autre.

Remarque 29. — Dans la pratique, pour montrer que deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, il suffit de considérer un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ de P_1 et de déterminer un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ de P_2 tels que $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_1$ est colinéaire à $\vec{v}_2$.

Exemple 30. — Soit ABCDEFGH le cube de l'exemple 8. On note R, T et S les centres respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE. Démontrer que les plans (AHC) et (RTS) sont parallèles.

Application 31. — Démonstration du théorème du toit (théorème 22 du chapitre 7)

II. — Repères de l'espace

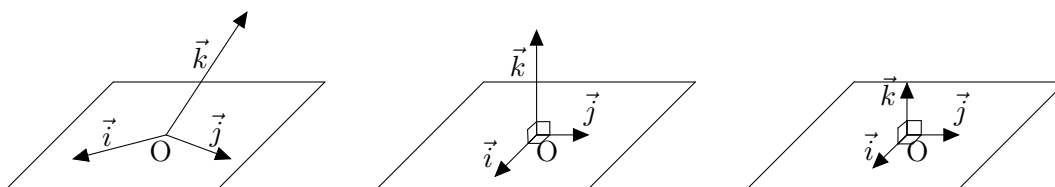
1) Définition

Définition 32

Un repère de l'espace est la donnée d'un point O appelé *origine* du repère et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ appelés *vecteurs de base*. Un tel repère est noté $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On dit que le repère est *orthogonal* si les droites $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$ et $(O; \vec{k})$ sont deux à deux perpendiculaires.

Une unité de longueur étant choisie, on dit que le repère est *orthonormé* ou *orthonormal* s'il est orthogonal et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

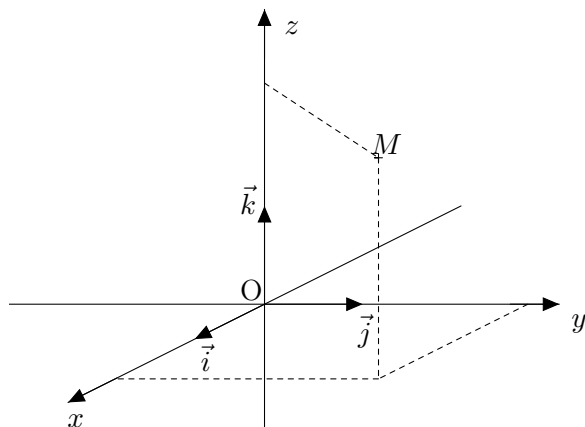


2) Coordonnées

Théorème et définition 33

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On dit alors que les nombres x , y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\vec{u}(x; y; z)$. Plus précisément, x est l'abscisse de $\vec{u}$, y est l'ordonnée de $\vec{u}$ et z est la cote de $\vec{u}$.
2. Si M est un point de l'espace alors les coordonnées de M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si ces coordonnées sont $(x; y; z)$, on note $M(x; y; z)$.



VOCABULAIRE. — Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite $(O, \vec{i})$ est appelée *axe des abscisses*, la droite $(O, \vec{j})$ est appelée *axe des ordonnées* et la droite $(O, \vec{k})$ est appelée *axe des cotes*.

Propriété 34

L'espace est muni d'un repère quelconque $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace, k un réel et $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. Alors,

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
2. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y'; z + z')$.
3. Les coordonnées de $-\vec{u}$ sont $(-x; -y; -z)$.
4. Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx; ky; kz)$.
5. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
6. Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple 35. — On reprend le cube ABCDEFGH de l'exemple 8 et on suppose que $AB = 1$. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace et déterminer les coordonnées des 8 sommets du cube dans ce repère.

Corollaire 36

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées dans un repère quelconque sont proportionnelles.

Exemple 37. — Reprendre les exemples 20 et 25 en utilisant un repère adapté.

3) Distance dans un repère orthonormé

Théorème 38

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(a; b; c)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple 39. — On reprend le cube ABCDEFGH de l'exemple 8. Démontrer que le triangle EBG est équilatéral d'abord sans utiliser de repère puis en munissant l'espace d'un repère orthonormé adapté.

Exemple 40. — L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 2; 3)$, $B(6; 6; 3)$ et $C(2; 9; 3)$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle.

III. — Représentations paramétriques d'une droite ou d'un plan de l'espace

Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Représentations paramétriques d'une droite

Propriété 41

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{v}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace. Alors, la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(S) \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ où t est un réel quelconque. Le système (S) est appelé une représentation paramétrique de Δ et le point de coordonnées $(x_A + ta; y_A + tb; z_A + tc)$ est appelé le point de paramètre t (pour cette représentation).

Remarque 42. — Il existe une infinité de représentations paramétriques différentes pour une même droite (il suffit de changer de point A et/ou de vecteur directeur $\vec{v}$). Le paramètre d'un point dépend de la représentation choisie.

Exemple 43. — Soit A et B les points de coordonnées respectives $(1; -2; 3)$ et $(0; 0; 1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB) .
2. Les points $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; 5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?
3. Déterminer une autre représentation paramétrique de (AB) .
4. On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est $(S') \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 3s \\ z = 2 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

Étudier les positions relatives de (AB) et Δ .

2) Représentations paramétriques d'un plan

Propriété 44

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors, le plan P passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(S) \begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$ où k et k' sont des réels quelconques. Le système (S) est appelé une représentation paramétrique de P et le point de coordonnées $(x_A + ka + k'a'; y_A + kb + k'b'; z_A + kc + k'c')$ est appelé le point de paramètres k et k' (pour cette représentation).

Remarque 45. — Comme dans le cas des droites, un même plan admet une infinité de représentations paramétriques différentes. De plus, on remarquera que les paramètres k et k' sont les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ du plan P .

Exemple 46. — Soit A, B et C les points de coordonnées respectives $(0; 2; -1)$, $(1; 1; 0)$ et $(3; 1; 1)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un unique plan P et déterminer une représentation paramétrique de P .
2. Les points $D(-3; 6; -5)$ et $E(-2; 2; -2)$ appartiennent-ils au plan P ?
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan P' parallèle à P et passant par le point $F(1; -2; 5)$.
4. On considère la droite Δ de l'exemple 43. Étudier les positions relatives de P et Δ .