

◆ Chapitre 8. — Les fonctions sinus et cosinus

I. — Sinus et cosinus d'un nombre réel (Rappels)

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

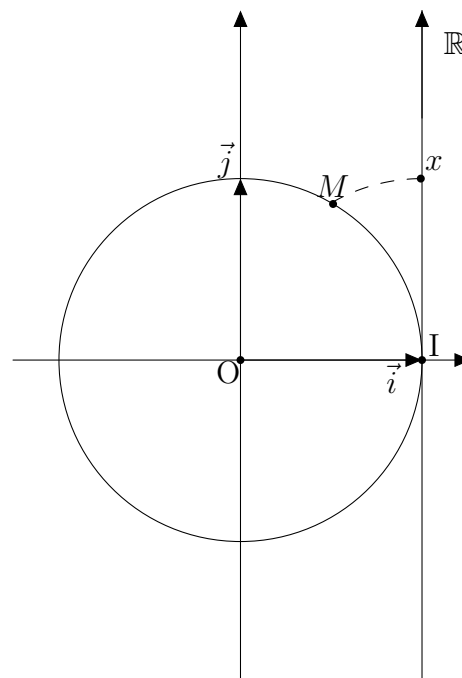
Définition 1

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Définition 2

À tout réel x , on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe réel autour de ce cercle. On dit alors que

1. M est le point du cercle associé à x ;
2. x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Propriété et définition 3

Soit x et y deux nombres réels. Alors, x et y sont associés à un même point du cercle trigonométrique si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $y - x = 2k\pi$. On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on note $x = y [2\pi]$.

Exercice 4. — Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

a) $x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{3\pi}{2}$ b) $x = \frac{2\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{3}$ c) $x = -\frac{5\pi}{12}, y = \frac{43\pi}{12}$.

Définition 5

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x . On définit le nombre $\cos x$ comme étant l'abscisse de M et le nombre $\sin x$ comme étant l'ordonnée de M . Autrement dit, les coordonnées de M sont $(\cos x; \sin x)$.

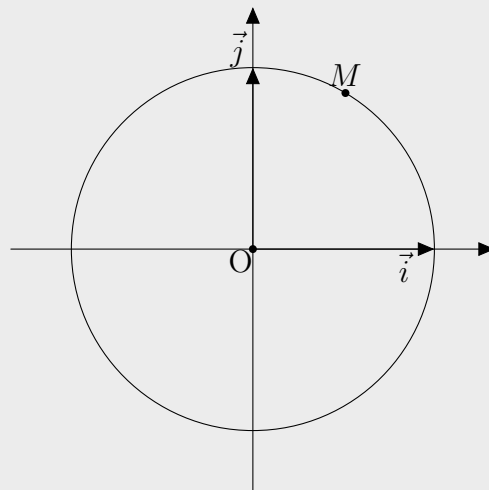
VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété 6

Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k ,

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ ce qui se note également $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



Exercice 7.

- Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \quad \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\pi\right) \quad \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

- Calculer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \quad \cos(2016\pi) \quad \cos\left(\frac{2017\pi}{2}\right) \quad \sin\left(\frac{2016\pi}{3}\right).$$

- Soit x un réel tel que $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ et $x \in [-\pi; 0]$. Déterminer $\sin(x)$.

Propriété 8. — formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b ,

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
 $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$;
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Exercice 9.

- Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
- Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

II. — Étude des fonctions sinus et cosinus

Définition 10

On appelle fonction sinus (resp. cosinus) la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre $\sin x$ (resp. $\cos x$). On note cette fonction $\sin$ (resp. $\cos$).

Propriété 11

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π (on dit aussi 2π -périodiques) ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

CONSÉQUENCE GRAPHIQUE. — Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont constituées d'un motif de longueur 2π qui se répète indéfiniment.

Ceci implique qu'on peut n'étudier ces deux fonctions que sur un intervalle de longueur 2π .

Remarque 12. — De manière générale, si T est un réel strictement positif, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est T -périodique si, pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

Propriété 13

1. La fonction $\cos$ est paire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
2. La fonction $\sin$ est impaire ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.

Remarque 14. — De manière générale, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ et on dit que f est impaire si, pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

CONSÉQUENCE GRAPHIQUE

1. La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Ceci, associé à la 2π -périodicité, implique qu'on peut n'étudier ces deux fonctions que sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Or, par définition, il est clair que

1. lorsque x augmente dans $[0; \pi]$, l'abscisse du point M diminue de 1 à -1 donc la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.
2. lorsque x augmente dans $[0; \pi]$, l'ordonnée du point M augmente de 0 à 1 puis diminue de 1 à 0 le maximum 1 étant atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction sinus est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

On a donc, en complétant par parité pour cosinus et par imparité pour sinus, les tableaux de variation suivants :

x	$-\pi$	π
$\cos$		

x	$-\pi$	π
$\sin$		

Théorème 15 ADMIS

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x ,

$$\sin'(x) = \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \cos'(x) = \quad \quad \quad .$$

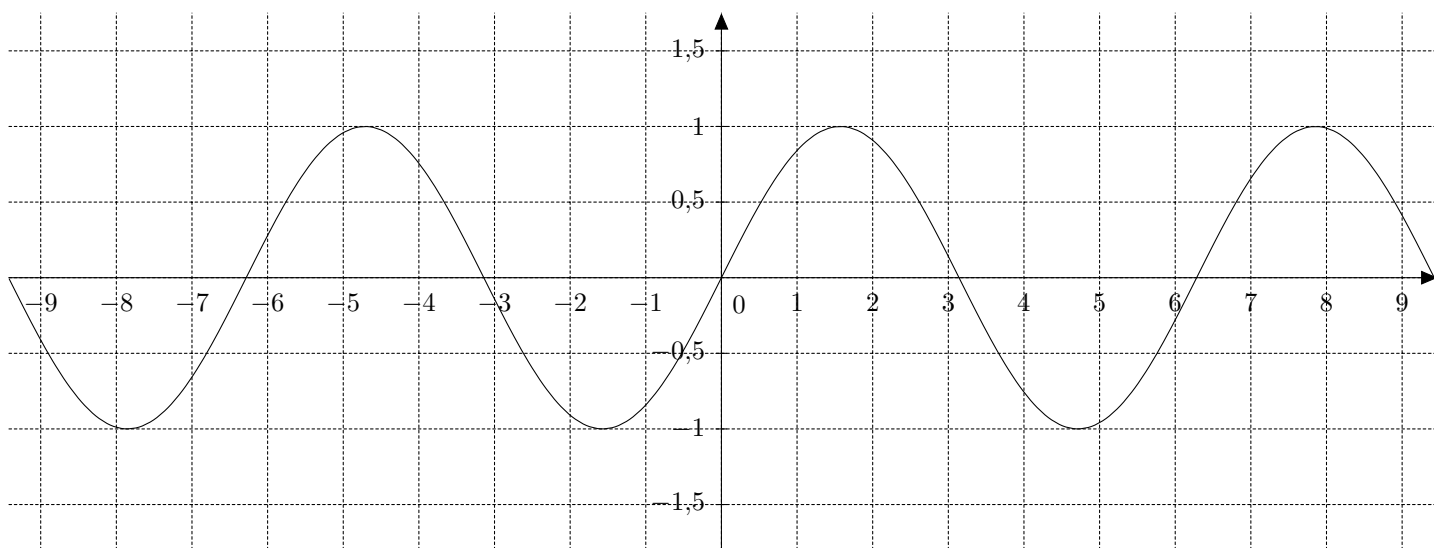
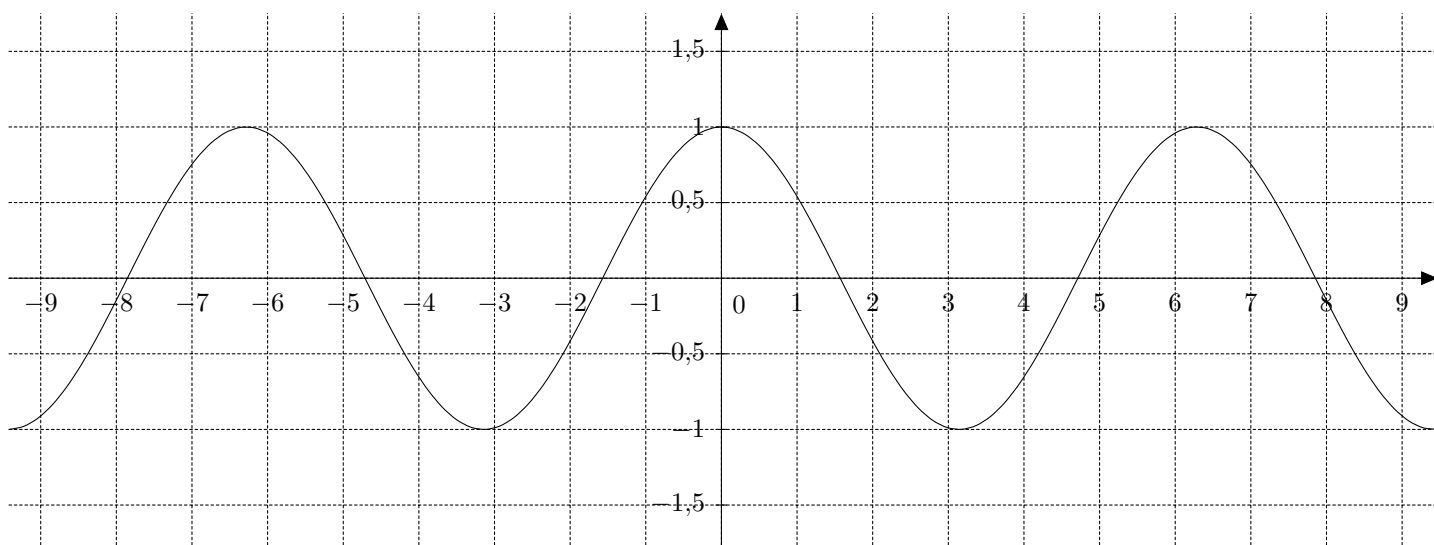
Exercice 16. Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \sin(3x + 1) \quad g : x \mapsto 3 \cos\left(\frac{1-x}{3}\right) \quad h : t \mapsto \sqrt{\cos^2 t + 1} \quad \text{et} \quad k : t \mapsto \sin^3(-t + 1).$$

Propriété 17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

COURBES REPRÉSENTATIVES



III. — Équations et inéquations trigonométriques

1) Équations

a) L'équation $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété 18

Soit un réel $a \in]-\pi; \pi]$.

Si $a \notin \{0; \pi\}$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ possède exactement 2 solutions dans $]-\pi; \pi]$ qui sont a et $-a$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $-a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $a = 0$ ou $a = \pi$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet une unique solution dans $]-\pi; \pi]$ qui est a . Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\cos x = 0$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

b) L'équation $\sin(x) = \sin(a)$

Propriété 20

Soit $a \in]-\pi; \pi]$.

Si $a \notin \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ possède exactement 2 solutions dans $]-\pi; \pi]$ qui sont a et $\pi - a$ si $a > 0$ ou $-\pi - a$ si $a < 0$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $\pi - a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $a = -\frac{\pi}{2}$ ou $a = \frac{\pi}{2}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet une unique solution dans $]-\pi; \pi]$ qui est a . Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sin x = 0$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) Inéquations trigonométriques

Principe général. — Pour résoudre une équation du type $\sin(x) \leq \sin(a)$ ou $\cos(x) \leq \cos(a)$ sur un intervalle de longueur 2π , on utilise le cercle trigonométrique.

Exemple 22.

1. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'inéquation $2 \sin x - \sqrt{2} \leq 0$.
3. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(2x) > \cos x - 1$.