

BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPÉCIFIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1**4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe. On note $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Pour $z \neq i$, on considère le nombre :

$$Z = \frac{z}{z - i}.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = -1$.
b. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = z$.
2. Montrer que la forme algébrique de Z , en fonction de x et y , est :

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

3. **a.** Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z du plan pour lesquels le nombre Z est un réel.
b. Tracer l'ensemble Δ dans le repère fourni sur l'annexe 1 (page 6).
4. **a.** Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z du plan pour lesquels le nombre Z est un imaginaire pur.
b. Tracer l'ensemble Γ dans le repère fourni sur l'annexe 1 (page 6).

EXERCICE 2**2 points**

Dans le cube ABCDEFGH représenté sur l'annexe 2 (page 6), les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [GH], [FG] et [BF].

Toutes les constructions sont à faire sur la figure de l'annexe 2 (page 6).

1. **a.** Montrer que les droites (IJ) et (EF) sont sécantes.
b. On appelle L leur point d'intersection. Construire le point L.
2. **a.** Montrer que les droites (KL) et (AB) sont sécantes.
b. On appelle M leur point d'intersection. Construire le point M.
3. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABF).
4. Construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK). Aucune justification n'est demandée mais on laissera clairement apparents tous les traits de construction.

EXERCICE 3**4 points**

Dans tout cet exercice, on considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \sin(x) \cos(x).$$

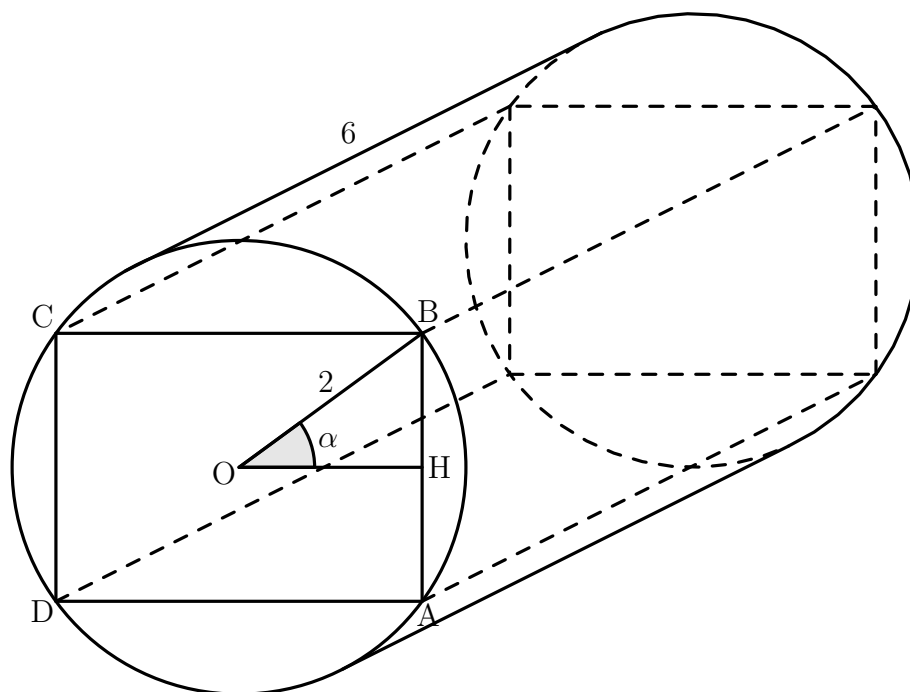
1. Pour tout réel x appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

puis en déduire que

$$f'(x) = \left[1 + \sqrt{2} \sin(x)\right] \left[1 - \sqrt{2} \sin(x)\right]$$

2. Etudier les variations de la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis dresser son tableau de variation.
3. On souhaite construire une galerie dans un tunnel de 6 mètres de long, ce qui nous conduit à considérer un parallélépipède rectangle inscrit dans un cylindre dont la longueur est 6 mètres et le rayon est 2 mètres, comme le montre le schéma ci-dessous.



On note O le centre du rectangle $ABCD$, H le milieu du segment $[AB]$ et α une mesure en radians de l'angle $\widehat{HOB}$, avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

- a. Montrer que le volume $V(\alpha)$ du parallélépipède rectangle est $96f(\alpha)$.
 - b. En déduire le volume maximal du parallélépipède.
 - c. Déterminer, dans ce cas, la largeur et la hauteur de la galerie.
4. a. Démontrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles le volume de la galerie est égal à 30 m^3 .
- b. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ radian de chacune des valeurs.

EXERCICE 4**5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A. — Un centre d'appels téléphoniques est composé de deux équipes : l'équipe A et l'équipe B.

Au cours d'une journée, un serveur automatique gère les appels de la manière suivante :

- si un appel est dirigé vers l'équipe A, l'appel suivant est dirigé vers l'équipe B avec une probabilité 0,8 ;
- si un appel est dirigé vers l'équipe B, l'appel suivant est dirigé vers l'équipe A avec une probabilité 0,7.

Pour tout entier naturel non nul n , on considère les événements suivants :

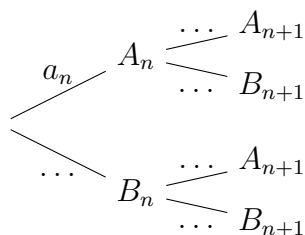
A_n : « le n -ième appel de la journée est dirigé vers l'équipe A »

B_n : « le n -ième appel de la journée est dirigé vers l'équipe B »

On note, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = P(A_n)$ la probabilité de l'évènement A_n .

On suppose que le premier appel de la journée est attribué de manière équiprobable entre l'équipe A et l'équipe B c'est-à-dire que $a_1 = 0,5$.

1. Déterminer la probabilité a_2 que le deuxième client de la journée soit dirigé vers l'équipe A. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Soit n un entier naturel non nul. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilités suivant.



3. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{7}{10}$.
4. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = a_n - \frac{7}{15}$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) ainsi définie est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de u_n puis celle de a_n en fonction de n .
 - c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{7}{15}$.
5. En fin de journée, après un grand nombre d'appels, on estime que le temps d'attente pour les appels dirigés vers l'équipe A est de 5 minutes et le temps d'attente pour les appels dirigés vers l'équipe B est de 8 minutes.

Une personne appelle le centre en fin de journée. À combien peut-on estimer son temps d'attente ? On détaillera sa démarche.

Partie B. — Afin de tester la qualité du service, le centre propose à chaque appelant de répondre à un questionnaire. On estime que deux personnes sur cinq acceptent d'y répondre.

On suppose que le fait d'accepter ou non de répondre au questionnaire est indépendant d'une personne à l'autre.

Lors d'une journée, on choisit aléatoirement 20 appelants différents et on note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui acceptent de répondre au questionnaire.

1. Déterminer la loi de X . On justifiera en détail sa réponse.
2. Quelle est la probabilité que la moitié des 20 personnes accepte de répondre ? On arrondira sa réponse au millièème.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des 20 personnes accepte de répondre ? On arrondira sa réponse au millièème.

EXERCICE 5**5 points**

Dans cet exercice, f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)e^{-2x+1}.$$

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x > 1$,

$$0 < f(x) < 5x^3 e^{-2x+1}.$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Soit x un réel. On pose $X = 2x$. Vérifier que :

$$5x^3 e^{-2x+1} = \frac{5e}{8} X^3 e^{-X}$$

et en déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

d. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

À l'aide des questions **b.** et **c.**, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 3)e^{-2x+1}.$$

b. Vérifier que, pour tout réel x ,

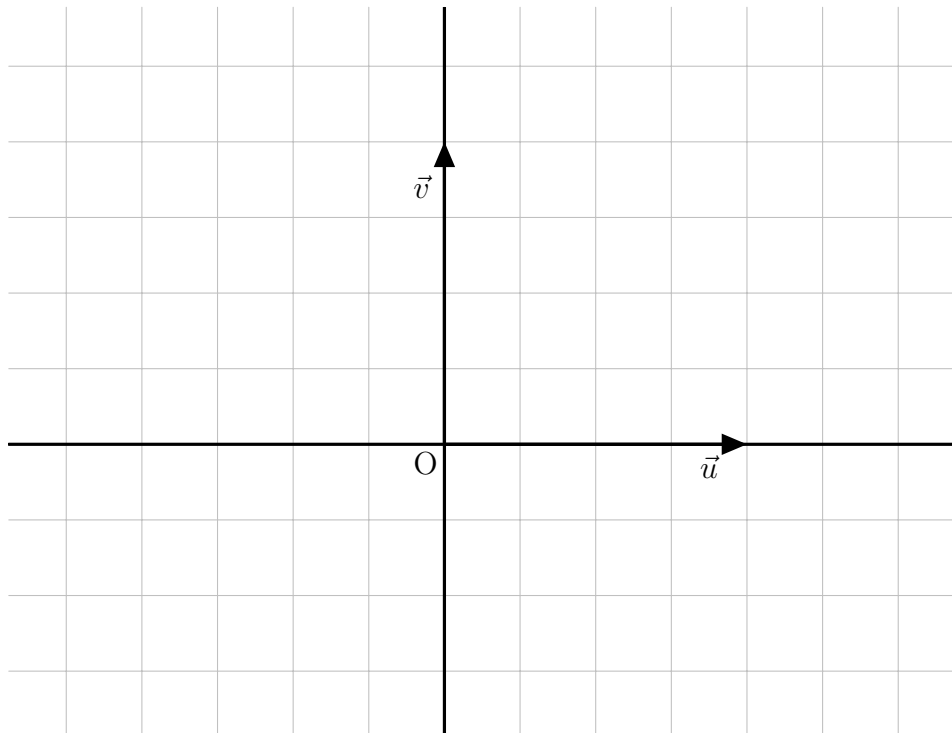
$$-2x^3 + x^2 - 3 = (x + 1)(-2x^2 + 3x - 3).$$

c. Déduire des questions précédentes le signe de f' , puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire que, pour tout réel x ,

$$x^3 + x^2 + x + 2 \leq e^{2x+2}.$$

Annexe 1



Annexe 2

