

BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Les calculatrices sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1**4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe. On note $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Pour $z \neq i$, on considère le nombre :

$$Z = \frac{z}{z - i}.$$

1. **a.** Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = -1$.
b. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = z$.
2. Montrer que la forme algébrique de Z , en fonction de x et y , est :

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

3. **a.** Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z du plan pour lesquels le nombre Z est un réel.
b. Tracer l'ensemble Δ dans le repère fourni sur l'annexe 1 (page 6).
4. **a.** Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z du plan pour lesquels le nombre Z est un imaginaire pur.
b. Tracer l'ensemble Γ dans le repère fourni sur l'annexe 1 (page 6).

EXERCICE 2**2 points**

Dans le cube ABCDEFGH représenté sur l'annexe 2 (page 6), les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [GH], [FG] et [BF].

Toutes les constructions sont à faire sur la figure de l'annexe 2 (page 6).

1. **a.** Montrer que les droites (IJ) et (EF) sont sécantes.
b. On appelle L leur point d'intersection. Construire le point L.
2. **a.** Montrer que les droites (KL) et (AB) sont sécantes.
b. On appelle M leur point d'intersection. Construire le point M.
3. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABF).
4. Construire la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK). Aucune justification n'est demandée mais on laissera clairement apparents tous les traits de construction.

EXERCICE 3**4 points**

Dans tout cet exercice, on considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \sin(x) \cos(x).$$

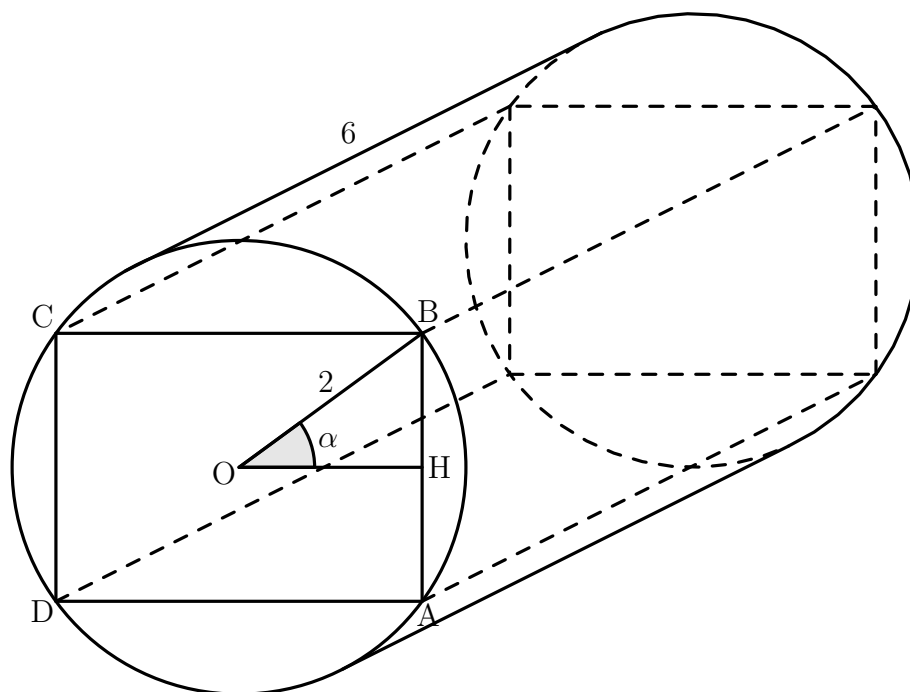
1. Pour tout réel x appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

puis en déduire que

$$f'(x) = \left[1 + \sqrt{2} \sin(x)\right] \left[1 - \sqrt{2} \sin(x)\right]$$

2. Etudier les variations de la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis dresser son tableau de variation.
3. On souhaite construire une galerie dans un tunnel de 6 mètres de long, ce qui nous conduit à considérer un parallélépipède rectangle inscrit dans un cylindre dont la longueur est 6 mètres et le rayon est 2 mètres, comme le montre le schéma ci-dessous.



On note O le centre du rectangle $ABCD$, H le milieu du segment $[AB]$ et α une mesure en radians de l'angle $\widehat{HOB}$, avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

- a. Montrer que le volume $V(\alpha)$ du parallélépipède rectangle est $96f(\alpha)$.
 - b. En déduire le volume maximal du parallélépipède.
 - c. Déterminer, dans ce cas, la largeur et la hauteur de la galerie.
4. a. Démontrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles le volume de la galerie est égal à 30 m^3 .
- b. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ radian de chacune des valeurs.

EXERCICE 4**5 points**

Dans tout cet exercice, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$$

Partie A

1. Calculer u_2 puis montrer que $u_3 = 39$ et $u_4 = 203$.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(u_3, u_4)$.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n ,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

b. Calculer PDP^{-1} .

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Déterminer, pour tout entier naturel n , la matrice A^n .

5. On admet que, pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{5^n - 2^n}{3}$.

Partie C

On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier et que, de plus, pour tout entier naturel non nul n , $u_n \neq 0$.

On pose, pour tout entier naturel n , $d_n = \text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$.

1. En utilisant la définition de (u_n) donnée au début de l'énoncé, montrer que, pour tout entier naturel n , d_n divise d_{n+1} et d_{n+1} divise $10d_n$.
2. En utilisant le résultat de la question 5. de la **Partie B**, montrer que, pour tout entier naturel n , u_{n+1} est premier avec 10.

Indication. — On pourra raisonner par l'absurde et considérer $3u_{n+1}$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n , $d_n = 1$.

EXERCICE 5**5 points**

Dans cet exercice, f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 2)e^{-2x+1}.$$

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x > 1$,

$$0 < f(x) < 5x^3 e^{-2x+1}.$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Soit x un réel. On pose $X = 2x$. Vérifier que :

$$5x^3 e^{-2x+1} = \frac{5e}{8} X^3 e^{-X}$$

et en déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

d. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

À l'aide des questions **b.** et **c.**, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 3)e^{-2x+1}.$$

b. Vérifier que, pour tout réel x ,

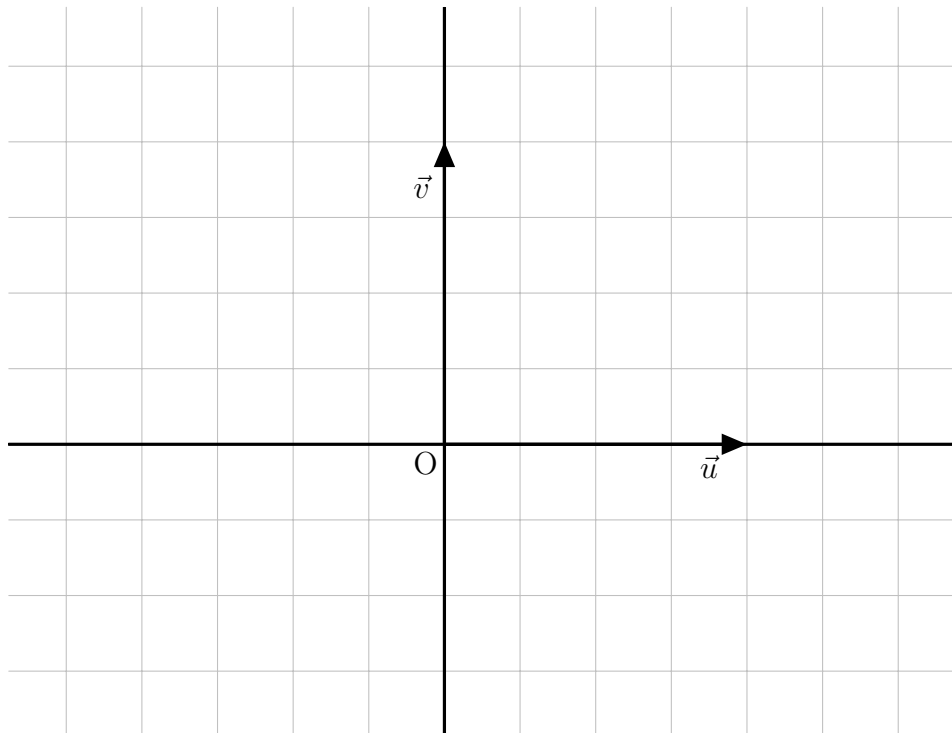
$$-2x^3 + x^2 - 3 = (x + 1)(-2x^2 + 3x - 3).$$

c. Déduire des questions précédentes le signe de f' , puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire que, pour tout réel x ,

$$x^3 + x^2 + x + 2 \leq e^{2x+2}.$$

Annexe 1



Annexe 2

