

Corrigé du baccalauréat blanc du 7 janvier 2020

EXERCICE 1

1. a. Pour tout complexe $z \neq i$,

$$Z = -1 \Leftrightarrow z = -(z - i) \Leftrightarrow z = -z + i \Leftrightarrow 2z = i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}i$$

Ainsi, l'ensemble des complexes z tels que $Z = -1$ est $\left\{\frac{1}{2}i\right\}$.

- b. Pour tout complexe $z \neq i$,

$$\begin{aligned} Z = z &\Leftrightarrow z = z(z - i) \Leftrightarrow z - z(z - i) = 0 \Leftrightarrow z(1 - (z - i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } 1 - z + i = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 + i \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des complexes z tels que $Z = z$ est $\{0; 1 + i\}$.

2. Pour tout complexe $z = x + iy$ différent de i :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy}{x + iy - i} = \frac{x + iy}{x + i(y - 1)} = \frac{(x + iy)(x - i(y - 1))}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y - 1) + iyx - i^2y(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y - 1) + iyx + y(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{-x(y - 1) + yx}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{-xy + x + yx}{x^2 + (y - 1)^2} \end{aligned}$$

et donc
$$Z = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

3. a. Pour tout complexe $z = x + iy$ différent de i ,

$$\begin{aligned} M(z) \in \Delta &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, Δ est l'axe des ordonnées privé du point $A(0; 1)$.

- b. Voir l'annexe 1.

4. a. Pour tout complexe $z = x + iy$ différent de i ,

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, Γ est le cercle de centre $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point $A(0; 1)$.

- b. Voir l'annexe 1.

EXERCICE 2

1. a. Les droites (IJ) et (EF) sont incluses dans le plan (EFG) donc elles sont coplanaires. De plus, la parallèle à (EF) passant par I est (HG) et $J \notin (HG)$ donc (IJ) n'est pas parallèle à (EF). On conclut donc que les droites (IJ) et (EF) sont sécantes.
 b. Voir l'annexe 2
2. a. Le point L appartient à la droite (EF) donc au plan (EFB). Ainsi, la droite (KL) est incluse dans (EFB). C'est également le cas de la droite (AB) donc (AB) et (KL) sont coplanaires. De plus, la parallèle à (AB) passant par L est (EF) et $K \notin (EF)$ donc (AB) et (KL) ne sont pas parallèles. On conclut donc que les droites (KL) et (AB) sont sécantes.
 b. Voir l'annexe 2.
3. Le point I appartient au plan (IJK) mais pas au plan (ABF) donc ces deux plans ne sont pas confondus.
 Le point K appartient aux plans (IJK) et (ABF) donc ces deux plans ne sont pas strictement parallèles.
 Ainsi, (IJK) et (ABF) sont sécants selon une droite Δ passant par K. De plus, le point L appartient à (IJ) donc au plan (IJK) et à la droite (EF) donc au plan (ABF). Ainsi, $K \in \Delta$ et donc, finalement, $\Delta = (KL)$.
4. Voir l'annexe 2. La section est le losange IJKMPQ (en rouge). On obtient le point N comme point d'intersection des droites (MK) et (AE) et le point O comme point d'intersection des droites (IJ) et (EH). On trace ensuite (ON) qui permet d'obtenir les points P et Q comme intersection de (ON) respectivement avec [AD] et [DH].
 Une autre construction est possible en utilisant le parallélisme des plans définis par les faces opposées du cube qui assure que (PM) est parallèle à (IJ) et que (PQ) est parallèle à (JK).

EXERCICE 3

1. La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) = \sin'(x) \cos(x) + \sin(x) \cos'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Or, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ donc

$$f'(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 1^2 - (\sqrt{2}\sin(x))^2$$

donc $f'(x) = [1 + \sqrt{2}\sin(x)][1 - \sqrt{2}\sin(x)]$.

2. Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq 0$ donc $1 + \sqrt{2}\sin(x) > 0$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \sqrt{2}\sin(x)$. Or, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$1 - \sqrt{2}\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{2}\sin(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Comme la fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $f'(x) \geq 0$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{4}$. On conclut donc que

f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Variation de f	0	$\frac{1}{2}$	0

3. a. La longueur OH vaut $2 \cos(\alpha)$ et la longueur BH vaut $2 \sin(\alpha)$. Or, l'aire du rectangle ABCD est

$$AB \times AD = (2OH) \times (2BH) = 4 \times 2 \cos(\alpha) \times 2 \sin(\alpha) = 16f(\alpha).$$

Comme la longueur de la galerie est 6, on conclut que $V(\alpha) = 6 \times 16f(\alpha)$ i.e.

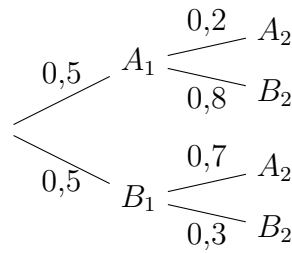
$$V(\alpha) = 96f(\alpha).$$

- b. Comme $96 > 0$, les variations de V sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sont les mêmes que celles de f donc V est maximale si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et alors le volume est $96f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 96 \times \frac{1}{2} = 48$.
Ainsi, le volume maximum du parallélépipède est 48 m^3 .
- c. Dans ce cas, étant donné que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la hauteur et la largeur de la galerie sont égales à $2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ i.e. $2\sqrt{2} \text{ m}$.
4. a. Grâce à la question 3.a., $V(\alpha) = 30$ si et seulement si $f(\alpha) = \frac{30}{96} = \frac{5}{16}$.
Or, sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction f est strictement croissante, continue (car dérivable) et, de plus, $\frac{5}{16} \in \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ donc, par la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha_1 \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $f(\alpha_1) = \frac{5}{16}$.
Par le même raisonnement (en remplaçant « strictement croissante » par « strictement décroissante » et « $\frac{5}{16} \in \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ » par « $\frac{5}{16} \in \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ »), il existe un unique réel $\alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(\alpha_2) = \frac{5}{16}$.
On conclut donc qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles le volume de la galerie est égal à 30 m^3 .
- b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $f(0,33) \approx 0,306 < \frac{5}{16}$ et $f(0,34) \approx 0,314 > \frac{5}{16}$ donc $0,33 < \alpha_1 < 0,34$.
De même, $f(1,23) \approx 0,315 > \frac{5}{16}$ et $f(1,24) \approx 0,307 < \frac{5}{16}$ donc $1,23 < \alpha_2 < 1,24$.

EXERCICE 4

Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

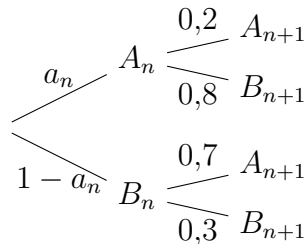


Comme A_1 et B_1 forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$a_2 = P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) = 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,7$$

donc $a_2 = 0,45$.

2. On a l'arbre suivant :



3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme A_n et B_n forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0,2 + (1 - a_n) \times 0,7 \\ &= 0,2a_n + 0,7 - 0,7a_n \\ &= -0,5a_n + 0,7 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{7}{10}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{7}{15} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{7}{10} - \frac{7}{15} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{7}{30} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{7}{15}\right) = -\frac{1}{2}u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or, $u_1 = a_1 - \frac{7}{15} = \frac{1}{30}$ donc,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + \frac{7}{15}$ donc, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{15}$.

c. Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et donc, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + \frac{7}{15}$,

$$\text{par somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{7}{15}.$$

5. Notons T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes. La variable T prend 2 valeurs : 5 et 8. À l'aide de la question précédente, on peut estimer que $P(T = 5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{7}{15}$ et donc $P(T = 8) = 1 - P(T = 5) = \frac{8}{15}$. Ainsi, on peut estimer que le temps d'attente moyen est $E(T) = \frac{7}{15} \times 5 + \frac{8}{15} \times 8 = \frac{33}{5} = 6,6$. On peut donc estimer que le temps d'attente moyen pour une personne appelant en fin de journée à 6,6 minutes i.e. environ 6 minutes 36 secondes.

Partie B

1. Choisir une personne au hasard parmi les appelants constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$ en prenant comme succès « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Choisir 20 appelants différents revient à répéter 20 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, cela constitue donc un schéma de Bernoulli de paramètres 20 et $\frac{2}{5}$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(20, \frac{2}{5})$.

2. La probabilité que la moitié des 20 personnes accepte de répondre est $P(X = 10) \approx 0,117$.
3. La probabilité qu'au moins la moitié des 20 personnes interrogées accepte de répondre est $P(X \geq 10) \approx 0,245$.

EXERCICE 4 (SPÉCIALITÉ)

5 points

Partie A

1. On a $u_2 = 7u_1 - 10u_0 = 7 \times 1 - 10 \times 0$ donc $u_2 = 7$. Dès lors, $u_3 = 7u_2 - u_1 = 7 \times 7 - 10 \times 1 = 49 - 10$ donc $u_3 = 39$ et $u_4 = 7u_3 - 10u_2 = 7 \times 39 - 10 \times 7$ donc $u_4 = 203$.
2. Les divisions successives sont :

$$203 = 5 \times 39 + 8$$

$$39 = 4 \times 8 + 7$$

$$8 = 7 \times 1 + 1$$

Ainsi, d'après l'algorithme d'Euclide, $\text{PGCD}(u_3, u_4) = 1$.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u_{n+1} - 10u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

donc $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.

2. a. Le déterminant de P est $\det(P) = 2 \times 1 - 1 \times 5 = -3 \neq 0$ donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i.e. } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $PDP^{-1} = A$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

D'une part, $A^0 = I_2$ et, d'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc H_0 est vraie.

Supposons que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, grâce à la question **2.b.**,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = (PD^k P^{-1})(PD P^{-1}) = PD^k (PP^{-1}) DP^{-1} \\ &= PD^k I_2 DP^{-1} = PD^k DP^{-1} = PD^{k+1} P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

On a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}}.$

4. Comme la matrice D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$. On en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2^n}{3} & \frac{5 \times 2^n}{3} \\ \frac{5^n}{3} & -\frac{2 \times 5^n}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{5^{n+1}}{3} & \frac{5 \times 2^{n+1}}{3} - \frac{2 \times 5^{n+1}}{3} \\ -\frac{3 \times 2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & \frac{5 \times 2^n}{3} - \frac{2 \times 5^n}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3} & \frac{5 \times 2^{n+1} - 2 \times 5^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n - 2^n}{3} & \frac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3} \end{pmatrix}}$

5. On en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3} & \frac{5 \times 2^{n+1} - 2 \times 5^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n - 2^n}{3} & \frac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n - 2^n}{3} \end{pmatrix}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{5^n - 2^n}{3}}.$

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors, d_n divise u_n et u_{n+1} donc d_n divise toute combinaison linéaire de u_n et u_{n+1} et ainsi d_n divise $7u_{n+1} - 10u_n$ i.e. d_n divise u_{n+2} . Dès lors, d_n divise u_{n+1} et u_{n+2} donc $\boxed{d_n \text{ divise } d_{n+1}}.$

Inversement, d_{n+1} divise u_{n+1} et u_{n+2} donc d_{n+1} divise toute combinaison linéaire de u_{n+1} et u_{n+2} et ainsi d_{n+1} divise $7u_{n+1} - u_{n+2}$ i.e. d_{n+1} divise $10u_n$. Or, d_{n+1} divise u_{n+1} donc d_{n+1} divise $10u_{n+1}$. Dès lors, d_{n+1} divise $\text{PGCD}(10u_n, 10u_{n+1}) = 10\text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$ i.e. $\boxed{d_{n+1} \text{ divise } 10d_n}.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\delta_n = \text{PGCD}(u_{n+1}, 10)$. Alors, δ_n divise 10 donc $\delta_n \in \{1; 2; 5; 10\}$.

Supposons que $\delta_n \neq 1$. Alors, 2 ou 5 divise δ_n .

Or, $3u_{n+1} = 5^{n+1} - 2^{n+1}$ donc δ_n divise $5^{n+1} - 2^{n+1}$. Si 2 divise δ_n alors 2 divise $5^{n+1} - 2^{n+1}$. Or, 2 divise 2^{n+1} donc 2 divise 5^{n+1} . C'est absurde car les seuls diviseurs de 5^{n+1} sont des puissances de 5. De même, si 5 divise δ_n alors 5 divise $5^{n+1} - 2^{n+1}$ et, comme 5 divise 5^{n+1} donc 5 divise 2^{n+1} . C'est absurde car les seuls diviseurs de 2^{n+1} sont des puissances de 2.

On conclut que $\delta_n = 1$ i.e. $\boxed{10 \text{ et } u_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}}.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons D_n le P.G.C.D. de 10 et de d_{n+1} . Alors D_n divise d_{n+1} et d_{n+1} divise u_{n+1} donc D_n divise u_{n+1} et ainsi D_n divise $\text{PGCD}(10, u_{n+1}) = 1$ donc d_{n+1} est premier avec 10. Or, d_{n+1} divise $10d_n$ donc, grâce au théorème de Gauss, d_{n+1} divise d_n .
Ainsi, $d_n \mid d_{n+1}$ et $d_{n+1} \mid d_n$ donc, comme d_n et d_{n+1} sont positifs, $d_n = d_{n+1}$. Autrement dit, la suite (d_n) est constante. Comme $d_0 = \text{PGCD}(0, 1) = 1$, on conclut que, pour tout entier naturel n , $d_n = 1$.

EXERCICE 5

1. Comme $x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ est une fonction polynôme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 + x + 1 = -\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x+1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = +\infty$.
Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
2. a. Soit $x > 1$. Alors, en multipliant par $x > 0$, on obtient $x^2 > x$ et en multipliant par $x^2 > 0$, on obtient $x^3 > x^2$. Ainsi, $1 < x < x^2 < x^3$.
- b. Soit $x > 1$. Alors, $x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ et $e^{-2x+1} > 0$ donc $f(x) > 0$. De plus, grâce à la question précédente, $x^3 + x^2 + x < x^3 + x^3 + x^3 = 3x^3$ et $1 < x^3$ donc $2 < 2x^3$. Ainsi, $x^3 + x^2 + x + 2 < 5x^3$ et, comme $e^{-2x+1} > 0$, $(x^3 + x^2 + x + 1)e^{-2x+1} < 5x^3e^{-2x+1}$.
Ainsi, on a montré que, pour tout réel $x > 1$, $0 < f(x) < 5x^3e^{-2x+1}$.
- c. On a $x = \frac{X}{2}$ donc

$$5x^3e^{-2x+1} = 5\left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{-X+1} = 5 \times \frac{X^3}{8} e^{-X} \times e^1$$

donc $5x^3e^{-2x+1} = \frac{5e}{8} X^3 e^{-X}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et, grâce au résultat admis, $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X} = 0$, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X} = 0$. Dès lors, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e}{8} X^3 e^{-X} = 0$ i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3e^{-2x+1} = 0$.

- d. Grâce aux questions b. et c., on déduit du théorème d'encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

3. a. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2x + 1)e^{-2x+1} + (x^3 + x^2 + x + 2)(-2e^{-2x+1}) \\ &= (3x^2 + 2x + 1 - 2(x^3 + x^2 + x + 2))e^{-2x+1} \\ &= (3x^2 + 2x + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4)e^{-2x+1} \end{aligned}$$

et donc $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 3)e^{-2x+1}$.

- b. Soit un réel x . Alors,

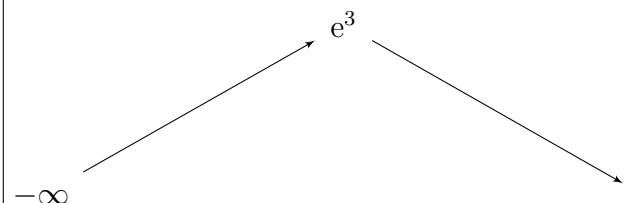
$$(x+1)(-2x^2 + 3x - 3) = -2x^3 + 3x^2 - 3x - 2x^2 + 3x - 3 = -2x^3 + x^2 - 3$$

donc on a bien $-2x^3 + x^2 - 3 = (x+1)(-2x^2 + 3x - 3)$.

- c. Comme $\exp$ est à valeurs strictement positives, pour tout réel x , le signe de $f'(x)$ est le signe de $-2x^3 + x^2 - 3$ i.e. $(x+1)(-2x^2 + 3x - 3)$ d'après la question précédente. Or, le discriminant du trinôme $-2x^2 + 3x - 3$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = -15 < 0$ donc, comme $-2 < 0$, $-2x^2 + 3x - 3 < 0$ pour tout réel x .

Ainsi, le signe de $f'(x)$ est l'opposé du signe de $x+1$ i.e. $f'(x) > 0$ pour tout réel $x < -1$, $f'(-1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour tout réel $x > -1$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

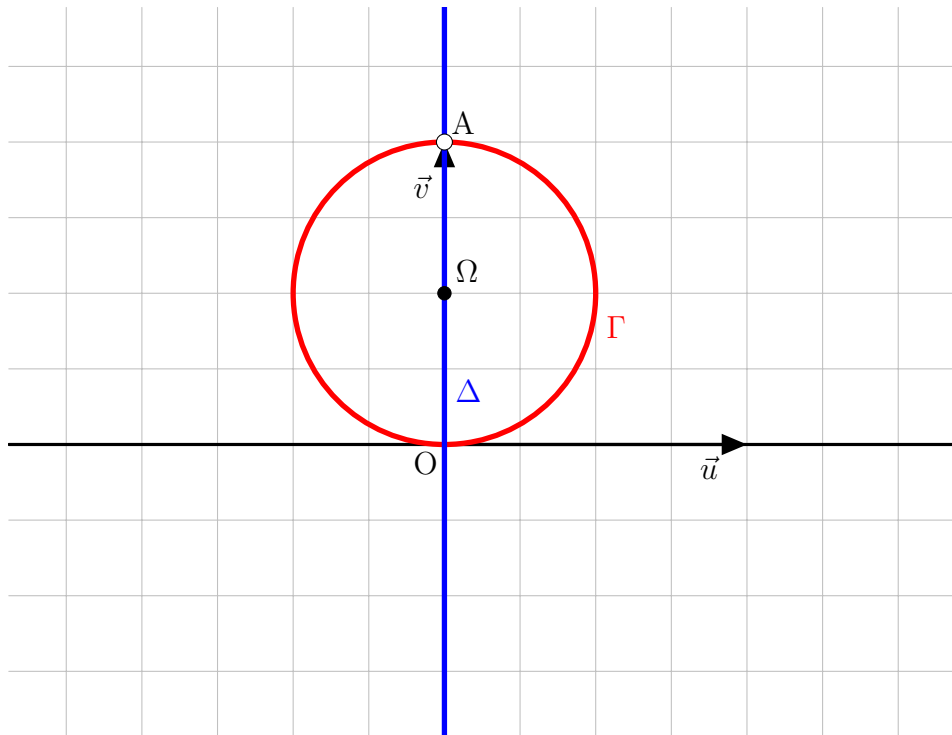
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f			

- d. D'après le tableau, pour tout réel x , $f(x) \leq e^3$ i.e. $(x^3 + x^2 + x + 2)e^{-2x+1} \leq e^3$. Or, pour tout réel x , $e^{-2x+1} > 0$ donc, en divisant par e^{2x-1} , il vient

$$x^3 + x^2 + x + 2 \leq \frac{e^3}{e^{2x-1}} = e^{3-(-2x+1)}$$

i.e. $\boxed{x^3 + x^2 + x + 2 \leq e^{2x+2}}.$

Annexe 1



Annexe 2

