♦ Corrigés des exercices du chapitre 9

Exercice 1. Déterminer la matrice de chacune des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y\,;y-2x+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (y+z\,;z+x\,;x+y) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}.$$

Solution.

• La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

• La matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

• $h(1) = 1$, $h(X) = X+1$, $h(X^2) = (X+1)^2 = X^2+2X+1$ et $h(X^3) = (X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1$ donc la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}_2$ et de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

• $h(1) = (1,1,1,1)$, $k(X) = (1,2,3,4)$, $k(X^2) = (1,4,9,16)$ et $k(X^3) = (1,8,27,64)$ donc la matrice de k dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (5x+5y-2z\,;x+7y-z) \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1\,;0\,;2)\,,(0\,;1\,;1)\,,(1\,;0\,;1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathcal{B}' = ((1\,;-1)\,,(1\,;2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Solution.

1. Considérons trois réels a, b et c tels que $a\,(1\,;0\,;2)+b\,(0\,;1\,;1)+c\,(1\,;0\,;1)=(0\,;0\,;0)$. Alors, $(a+c\,;b\,;2a+b+c)=(0\,;0\,;0)$ donc $b=0$ puis $a+c=0$ et $2a+c=0$. On en déduit que $(2a+c)-(a+c)=0$ i.e. $a=0$ et enfin $c=0$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
2. Les vecteurs $(1\,;-1)$ et $(1\,;2)$ ne sont pas colinéaires (car $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{2}$) donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.
   $f(1,0,2)=(1\,;-1)$, $f(0,1,1)=(3\,;6)=2\,(1\,;2)$ et $f(1,0,1)=(3\,;0)=2\,(1\,;-1)+(1\,;2)$ donc
   $$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}}.$$

Exercice 3. On considère l'application linéaire

$$h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x\,;y) & \longmapsto & (5x+2y\,;3x+y)\end{array}$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. En utilisant A, démontrer que f est bijective et déterminer l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. $\boxed{A=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}}$.
2. $\det A=5\times1-3\times2=-1\neq0$ donc A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&5\end{pmatrix}$ i.e. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-5\end{pmatrix}$. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } (x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ f^{-1}(x,y)=(-x+3y\,;2x-5y)}$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \left(\frac{x-2y+z}{2}\,;y\,;\frac{x+2y+z}{2}\right)\end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $g=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}-f$ et de $h=2f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Solution.

1. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\boxed{A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$.
2. On en déduit que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\boxed{I_3-A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$
   et celle de h est $\boxed{2A-I_3=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}}$.

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1\,;1\,;0)$, $v = (1\,;0\,;1)$, $w = (1\,;1\,;1)$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

1. Écrire la matrice P de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}'$.
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   En utilisant les formules de changement de base, déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Solution.

1. $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.
2. Pour déterminer P^{-1}, on considère $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ et on résout le système

$$(S) \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x + z = b & L_2 \\ y + z = c & L_3 \end{cases}.$$

Or,

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -y = b - a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = cL_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + a - b + z = a \\ y = a - b \\ z = c + b - a \end{cases} \iff \begin{cases} x - b - a + b + c = 0 \\ y = a - b \\ z = -a + b + c \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible et que } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Comme P est inversible, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

3. Par les formules de changement de bases,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 6. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose $\varepsilon_1 = (1\,;1\,;0)$, $\varepsilon_2 = (1\,;0\,;1)$ et $\varepsilon_3 = (1\,;1\,;1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Déterminer une base de $\ker(A)$ et une base de $\operatorname{Im}(A)$.

Solution.

1. Considérons des réels a, b et c tels que $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = (0\,;0\,;0)$. Alors, $(a+b+c\,;a+c\,;b+c) = (0\,;0\,;0)$ donc $a+b+c=0$, $a+c=0$ et $b+c=0$. Or, comme $a+c=0$ et $b+c=0$, on déduit de $a+b+c=0$ que $b=0$ et $a=0$ et, par suite, $a=0$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. On a $f(\varepsilon_1) = (0\,;0\,;0)$, $f(\varepsilon_2) = (1\,;0\,;1) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = (2\,;2\,;2) = 2\varepsilon_3$ donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3. La matrice précédente est diagonale et possède 2 pivots donc son rang des 2. On en déduit que $\operatorname{rg}(f) = 2$ i.e. $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(A)) = 2$. Comme $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$, les vecteurs ε_2 et ε_3 appartiennent à $\operatorname{Im}(A)$ donc, comme ces deux vecteurs sont libres, $\boxed{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(A)}$. De plus, $f(\varepsilon_1) = 0$ donc $\varepsilon_1 \in \ker(A)$ et, par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{Im}(A)) = 3$ donc $\dim(\ker(A)) = 1$. Ainsi, $\boxed{(\varepsilon_1) \text{ est une base de } \ker(A)}$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (5x-6y\,;2x-2y)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $e_1 = (3\,;2)$ et $e_2 = (2\,;1)$.

  a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

  b. Calculer$f(e_1)$ et $f(e_2)$.

  c. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **a.** Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$.

  b. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

  c. Démontrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^n en fonction de n.

Solution.

1. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$.

2. **a.** Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires (car $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$) donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. Or, c'est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est dimension 2 donc on peut conclure que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

b. $f(e_1) = (3\,;2) = e_1$ et $f(e_2) = (4\,;2) = 2e_2$.

c. On en déduit que $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3. Comme D est une matrice diagonale, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

4. a. La matrice de passage de la canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

b. Par le formule de changement de base, $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Comme $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = I_2$, H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors, $A^n = PD^nP^{-1}$ et, d'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}.$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or, $\det(P) = 3\times1-2\times2 = -1$ donc $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2^{n+1} & -3\times 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+2^{n+2} & 6-3\times2^{n+1} \\ -2+2^{n+1} & 4-3\times2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 6-3\times2^{n+1} \\ 2^{n+1}-2 & 4-3\times2^n \end{pmatrix}}.$$

Exercice 8. Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et écrire la matrice D de f dans cette base.

2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

Solution.

1. Soit a, b et c des réels tels que $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = 0$. Alors, $a(e_1+e_2+e_3) + b(e_1 - e_3) + c(e_1 - e_2) = 0$ i.e. $(a+b+c)e_1 + (a-c)e_2 + (a-b)e_3 = 0$. Or, (e_1, e_2, e_3) est libre donc $a+b+c = 0$, $a - c = 0$ et $a - b = 0$. On en déduit que $a = c$ et $a = b$ donc on tire de $a + b + c = 0$ que $3a = 0$ i.e. $a = 0$ et, par suite, $b = c = 0$. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est libre. Or, $\mathcal{B}$ est une base de E donc $\dim(E) = 3$. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E}$.

$f(\varepsilon_1) = (2-1)e_1 + (-2+1+2)e_2 + (1+1-3)e_3 = e_1 + e_2 - e_3 = \varepsilon_1$,

$f(\varepsilon_2) = (2-0)e_1 + (-2-(-2))e_2 + (1-3)e_3 = 2e_1 - 2e_3 = 2\varepsilon_2$

$f(\varepsilon_3) = (2-(-1))e_1 + (-2-1)e_2 + (1-1)e_3 = 3e_1 - 3e_2 = 3\varepsilon_3$

Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Soit a, b et c trois réels et $(S) \begin{cases} x+y+z = a & L_1 \\ x - z = b & L_2 \\ -x-y = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z = a & L_1 \\ -y-2z = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ z = c+a & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+a+c = a \\ y = a-b-2(a+c) \\ z = a+c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-a-b-2c+c = 0 \\ y = -a-b-2c \\ z = a+c \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} x = a+b+c = 0 \\ y = -a-b-2c \\ z = a+c \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. Par le formule de changement de bases, $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Comme $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = I_3$, H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors, $A^n = PD^nP^{-1}$ et, d'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme D est diagonale,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2^n & -2^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ -1+2^n & -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 9. Déterminer le noyau, le rang et l'image de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. Commençons par déterminer le noyau de A. Un vecteur $(x\,;y\,;z)$ appartient à $\ker(A)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 & L_1 \\ -x+2y-z=0 & L_2 \\ -x-y+2z=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y-z=0 & L_1 \\ x-2y+z=0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ x+y-2z=0 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x-2y+z=0 & L_2 \\ 2x-y-z=0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-2z=0 & L_1 \\ -3y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -3y+3z=0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\ker(A) = \{(z\,;z\,;z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;1\,;1))}$.

On en déduit que $\dim(Ker(A)) = 1$ donc, par le théorème du rang, $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 3-1 = 2}$. Autrement dit, $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$. Or, par propriété, $v_1 = (2\,;-1\,;-1)$ et $v_2 = (-1\,;2\,;-1)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(A)$ et ces deux vecteurs forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires ($\frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{2}$) donc (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}((2\,;-1\,;-1)\,,(-1\,;2\,;-1))}$.

Exercice 10. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1\,;0\,;1)$, $\varepsilon_2 = (-1\,;1\,;0)$ et $\varepsilon_3 = (1\,;1\,;1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'endomorphisme $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Solution.

1. Considérons des réels a, b et c tels que $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = (0\,;0\,;0)$. Alors, $(a - b + c\,; b + c\,; a + c) = 0$. Ainsi, $a - b + c = 0$ et $a + c = 0$ donc $b = 0$. De plus, $b + c = 0$ donc, comme $b = 0$, $c = 0$ et, comme $a + c = 0$, $a = 0$. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. $f(\varepsilon_1) = (1\,;0\,;1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = (-1\,;1\,;0) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = (2\,;1\,;2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans $\mathcal{B}'$ est T^n.

On observe que $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons-le par récurrence.

Comme $T^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'égalité est vraie au rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1}.

Pour cela, on considère des réels a, b et c et le système $(S) \begin{cases} x - y + z = a & L_1 \\ y + z = b & L_2 \\ x + z = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + z = a & L_1 \\ y + z = b & L_2 \\ y = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + c - a - (a + b - c) \\ z = a + b - c \\ y = c - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a - b + 2c \\ y = -a + c \\ z = a + b - c \end{cases}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Or, par les formules de changement de bases, la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{aligned} PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+n & -1+n & 2-n \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+n & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut que f^n est l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\boxed{f^n : (x\,;y\,;z) \longmapsto ((1+n)x+ny-nz\,;y\,;nx+ny+(1-n)z)}.$$

Exercice 11. En utilisant les matrices, déterminer le rang des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;y-z\,;z-x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+1) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

• La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Les matrices suivantes ont le même rang de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

La matrice échelonnée possède deux pivots donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

• Étant donné que $g(1) = 0$, $g(X) = X$ et $g(X^2) = X \times 2(X+1) = 2X^2 + 2X$, la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

La matrice B est échelonnée et possède deux pivots donc $\mathrm{rg}(B) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(g) = 2}$.

• Étant donné que

$$h(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} - E_{2,1}$$

$$h(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} - E_{2,2}$$

$$h(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,2}$$

$$h(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,1}$$

la matrice de h dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Les matrices suivantes ont le même rang de C :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

La matrice échelonnée possède deux pivots donc $\mathrm{rg}(C) = 2$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(h) = 2}$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f : P \longmapsto P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Solution.

1. Soit $m \in [\![0, n]\!]$. Alors, par la formule du binôme de Newton,

$$f(X^m) = (X+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k 1^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k$$

donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le coefficient d'indice i et j de A est $[A]_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ avec la convention habituelle $\binom{n}{p} = 0$ si $n < p$.

2. Considérons l'application $g : P \longmapsto P(X-1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$(f \circ g)(P) = f(P(X-1)) = P((X+1)-1) = P(X)$$

et
$$(g \circ f)(P) = g(P(X+1)) = P((X-1)+1) = P(X)$$
donc $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f est un automorphisme et $f^{-1} = g$. On en déduit que A est inversible et que A^{-1} est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Or, pour tout $m \in [\![0, n]\!]$,
$$g(X^m) = (X-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k (-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} X^k$$
donc
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & -\binom{3}{0} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & -\binom{3}{2} & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$
Autrement dit, le coefficient d'indice i et j de A^{-1} est $[A^{-1}]_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$ avec la convention habituelle $\binom{n}{p} = 0$ si $n < p$.

Exercice 13. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_3$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ ou $\mathrm{rg}(B) \leqslant 1$.

Solution. Supposons que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Alors, par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) \leqslant 1$. Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Comme $AB = 0_3$, $f \circ g$ est l'endomorphisme nul. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \ker(f) = \ker(A)$ ce qui montre que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(A)$ i.e. $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(A)$. Comme $\dim(\ker(A)) \leqslant 1$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(B)) \leqslant 1$ i.e. $\mathrm{rg}(B) \leqslant 1$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\mathrm{rg}(A) \leqslant 1 \text{ ou } \mathrm{rg}(B) \leqslant 1}$.