Corrigé du sujet d'E3C 64

Exercice 1.

1. Réponse **c)** : graphiquement, on lit que l'ordonnée à l'origine est 18 et le coefficient directeur est $\frac{18-3}{3} = 5$.
2. Réponse **b)** : la fonction f est croissante $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$ donc sa dérivée est positive sur $]-\infty\,;-2]$, négative sur $[-2\,;2]$ et positive sur $[2\,;+\infty[$.
3. Réponse **b)** : pour $x = 0$, $\cos(0+\pi) + \sin(0+\frac{\pi}{2}) = -1+1 = 0$ ce qui exclu les réponses **a)**, **c)** et **d)**.
4. Réponse **b)** : pour tout réel x, $f(x) = -2(x^2-2x-3) = -2(x+1)(x-3)$ donc $f(x) > 0$ entre les racines -1 et 3.
5. Réponse **b)** : pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-1)\mathrm{e}^x = (2+2x-1)\mathrm{e}^x = (2x+1)\mathrm{e}^x$.

Exercice 2.

1. La distance parcourue le deuxième jour est $50 \times (1 - \frac{2}{100}) = 49$ km.
2. Pour tout entier n non nul, $D_{n+1} = D_n \times (1 - \frac{2}{100}) = 0{,}98D_n$ donc (D_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme $D_1 = 50$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $D_n = 50 \times (0{,}98)^{n-1}$.
4. On complète les lignes de la manière suivante :

   `While S < 2000`

   `j=j+1` ou `j+=1`
5. Le globe-trotter atteindra son objectif lors du 80e jour.

Exercice 3.

1. Une équation de $\mathcal{C}$ est $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 5^2$. En développant, cela donne $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 25$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 4x - 10y = -4$.
2. On a $x_B^2 + y_B^2 - 4x_B - 10y_B = 5^2 + 9^2 - 4 \times 5 - 10 \times 9 = -4$ donc $B \in \mathcal{C}$.
3. La tangente $\mathcal{T}$ au cercle $\mathcal{C}$ est tangente à (AB) par définition.
4. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(3\,;4)$ est normal à $\mathcal{T}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M\,(x\,;y) \in \mathcal{T} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5) \times 3 + (y-9) \times 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 15 + 4y - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y - 51 = 0 \end{aligned}$$

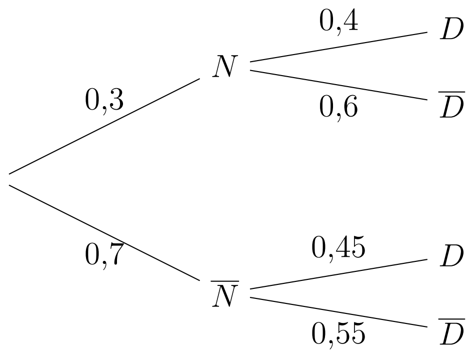
   Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ est $3x + 4y - 51 = 0$.
5. Un point $M\,(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ et il appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $x = 0$. Ainsi, un point $M\,(x\,;y)$ est à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 10x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   Le discriminant du trinôme $y^2 - 10x + 4$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 84$ donc ce trinôme a deux racines réelles $y_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{84}}{2} = 5 - \sqrt{21}$ et $y_2 = \frac{-(-10)+\sqrt{84}}{2} = 5 + \sqrt{21}$.
   On conclut donc que les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées sont $\mathrm{C}\big(0\,;5-\sqrt{21}\big)$ et $\mathrm{D}\big(0\,;5+\sqrt{21}\big)$.

Exercice 4.

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. $P(\overline{N}\cap\overline{D}) = P(\overline{N})\times P_{\overline{N}}(\overline{D}) = 0{,}7\times 0{,}55 = 0{,}385$. Ainsi, la probabilité que l'automobiliste prenne l'autoroute sur l'intégralité du trajet entre Paris et Limoges est 0,385.

3. Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers donc, par la formule de probabilités totales,

$$P(\overline{D}) = P(N)\times P_N(\overline{D}) + P(\overline{N})\times P_{\overline{N}}(\overline{D}) = 0{,}3\times 0{,}6 + 0{,}7\times 0{,}55 = 0{,}565.$$

Ainsi, la probabilité que l'automobiliste ne prenne pas la route départementale entre Orléans et Limoges est 0,565.

4.

Évènement	$N\cap D$	$N\cap\overline{D}$	$\overline{N}\cap D$	$\overline{N}\cap\overline{D}$
Temps en heure	5,5	6	6,5	7
Probabilité	0,12	0,18	0,315	0,385

5. Notons X la variable aléatoire égale à la durée en heure du trajet. Alors,

$$E(X) = 0{,}12\times 5{,}5 + 0{,}18\times 6 + 0{,}315\times 6{,}5 + 0{,}385\times 7 = 6{,}4825.$$

Cela signifie, qu'en moyenne, un automobiliste met environ 6h30 pour faire le trajet Paris-Limoges lors d'une journée classée rouge.