Chapitre 11. — Variables aléatoires

I. Notion de variable aléatoire

I. Notion de variable aléatoire

1. Un exemple pour commencer

I. Notion de variable aléatoire

1. Un exemple pour commencer

Exemple 1

On considère le jeu suivant. On lance un dé équilibré et on fixe la règle suivante :

1. si on obtient 1, 2 ou 3, on perd 1 euro ;
2. si on obtient 4, on ne gagne rien ;
3. si on obtient 5, on gagne 1 euro ;
4. si on obtient 6, on gagne 2 euros.

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, la somme d'argent gagnée ou perdue).

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, la somme d'argent gagnée ou perdue).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer :

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, la somme d'argent gagnée ou perdue).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer : l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, la somme d'argent gagnée ou perdue).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer : l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des sommes d'argent associées $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, la somme d'argent gagnée ou perdue).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer : l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des sommes d'argent associées $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.

D'un point de vue mathématique, fixer la règle ci-dessus revient à définir une fonction de Ω dans E : à chaque élément de Ω, on associe un et un seul nombre appartenant à E.

2. Définition et notations

2. Définition et notations

Définition 2

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω. Une variable aléatoire (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

2. Définition et notations

Définition 2

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω. Une variable aléatoire (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3

1. Autrement dit, une variable aléatoire sur Ω est un procédé qui permet d'associer, à chaque issue de l'expérience, un unique nombre réel.

2. Définition et notations

Définition 2

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω. Une <u>variable aléatoire</u> (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3

1. Autrement dit, une variable aléatoire sur Ω est un procédé qui permet d'associer, à chaque issue de l'expérience, un unique nombre réel.
2. En général, une variable aléatoire est notée avec une lettre majuscule et on utilise le plus souvent la lettre X.

2. Définition et notations

Définition 2

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω. Une variable aléatoire (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3

1. Autrement dit, une variable aléatoire sur Ω est un procédé qui permet d'associer, à chaque issue de l'expérience, un unique nombre réel.
2. En général, une variable aléatoire est notée avec une lettre majuscule et on utilise le plus souvent la lettre X.
3. Les valeurs prises par une variable aléatoire sont des réels quelconques (ils peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou non, ...).

Notation 4

L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω se note $X(\Omega)$.

Notation 4

L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω se note $X(\Omega)$.

Exemple 5

Dans l'exemple 1, la variable aléatoire est définie sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par $X(1) = X(2) = X(3) = -1$, $X(4) = 0$, $X(5) = 1$ et $X(6) = 2$.

Notation 4

L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω se note $X(\Omega)$.

Exemple 5

Dans l'exemple 1, la variable aléatoire est définie sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par $X(1) = X(2) = X(3) = -1$, $X(4) = 0$, $X(5) = 1$ et $X(6) = 2$. L'ensemble des valeurs prises par X est donc $X(\Omega) = \{-1\,;0\,;1\,;2\}$.

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$:

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$;

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$:

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$:c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) \leqslant a$;

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$:c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) \leqslant a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à a.

Définition 6

On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$:c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) \leqslant a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à a.

On définit de façon analogue les évènements $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} =$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} =$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} =$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} = \varnothing$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} = \varnothing$
4. $\{X > 0\} =$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} = \varnothing$
4. $\{X > 0\} = \{5\,;6\}$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} = \varnothing$
4. $\{X > 0\} = \{5\,;6\}$
5. $\{X \leqslant 2\} =$

Remarque 7

Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1. Alors, par exemple,

1. $\{X = -1\} = \{1\,;2\,;3\}$
2. $\{X = 2\} = \{6\}$
3. $\{X = 5\} = \varnothing$
4. $\{X > 0\} = \{5\,;6\}$
5. $\{X \leqslant 2\} = \Omega$

Notation 9

Si l'expérience aléatoire étudiée est modélisée par une probabilité P sur Ω alors, pour tout réel x, on note $P(X = a)$ la probabilité de l'évènement $(X = a)$ (au lieu de $P(\{X = a\})$.

Notation 9

Si l'expérience aléatoire étudiée est modélisée par une probabilité P sur Ω alors, pour tout réel x, on note $P(X = a)$ la probabilité de l'évènement $(X = a)$ (au lieu de $P(\{X = a\})$. On note de même $P(X \leqslant a)$, $P(X < a)$, $P(X \geqslant a)$ et $P(X > a)$ les probabilités des évènements $\{X \leqslant a\}$, $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Propriété 10

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers (i.e. ce sont des évènements deux à deux disjoints dont l'union est égale à Ω).

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.
Montrons que la réunion des $\{X = x_i\}$ est égale à l'univers.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.
Montrons que la réunion des $\{X = x_i\}$ est égale à l'univers. D'une part, chaque évènement $\{X = x_i\}$ est inclus dans Ω par définition donc $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$ est inclus dans Ω.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.
Montrons que la réunion des $\{X = x_i\}$ est égale à l'univers. D'une part, chaque évènement $\{X = x_i\}$ est inclus dans Ω par définition donc $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$ est inclus dans Ω.
Réciproquement, si $t \in \Omega$ alors il existe i tel que $X(t) = x_i$ donc $t \in \{X = x_i\}$ donc Ω est inclus dans
$\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \{X = x_k\}$.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.

Montrons que la réunion des $\{X = x_i\}$ est égale à l'univers. D'une part, chaque évènement $\{X = x_i\}$ est inclus dans Ω par définition donc $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$ est inclus dans Ω.

Réciproquement, si $t \in \Omega$ alors il existe i tel que $X(t) = x_i$ donc $t \in \{X = x_i\}$ donc Ω est inclus dans $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \{X = x_k\}$. Puisque ces deux ensembles sont mutuellement inclus l'un dans l'autre, on conclut donc que $\Omega = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$.

Démonstration.

Montrons que les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ sont deux à deux disjoints. En effet, si i et j sont deux indices différents compris entre 1 et k alors $x_i \neq x_j$. Or, si $t \in \{X = x_i\}$ et $u \in \{X = x_j\}$ alors $X(t) = x_i$ et $X(u) = x_j$ donc $X(t) \neq X(u)$ et donc $t \neq u$ puisqu'un élément de l'univers n'a qu'une seule image par X.
Montrons que la réunion des $\{X = x_i\}$ est égale à l'univers. D'une part, chaque évènement $\{X = x_i\}$ est inclus dans Ω par définition donc $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$ est inclus dans Ω. Réciproquement, si $t \in \Omega$ alors il existe i tel que $X(t) = x_i$ donc $t \in \{X = x_i\}$ donc Ω est inclus dans $\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \{X = x_k\}$. Puisque ces deux ensembles sont mutuellement inclus l'un dans l'autre, on conclut donc que $\Omega = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}$.
Ainsi, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers. $\square$

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire sur un univers fini

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire sur un univers fini

1. Définition

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire sur un univers fini

1. Définition

Définition 11

Soit X une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire modélisée sur un univers fini Ω par une probabilité P. La loi de probabilité de X est la donnée des probabilités $P(X = a)$ lorsque a prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

Exemple 12

Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1.

Exemple 12

Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité P sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De plus on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Exemple 12

Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité P sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De plus on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$. Comme $\{X = -1\} = \{1, 2, 3\}$, on a $P(X = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemple 12

Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité P sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De plus on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$. Comme $\{X = -1\} = \{1, 2, 3\}$, on a $P(X = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. De même, $\{X = 0\} = \{4\}$ donc $P(X = 0) = P(4) = \frac{1}{6}$, $\{X = 1\} = \{5\}$ donc $P(X = 1) = P(5) = \frac{1}{6}$ et $\{X = 2\} = \{6\}$ donc $P(X = 2) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Exemple 12

Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité P sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De plus on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$. Comme $\{X = -1\} = \{1, 2, 3\}$, on a $P(X = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. De même, $\{X = 0\} = \{4\}$ donc $P(X = 0) = P(4) = \frac{1}{6}$, $\{X = 1\} = \{5\}$ donc $P(X = 1) = P(5) = \frac{1}{6}$ et $\{X = 2\} = \{6\}$ donc $P(X = 2) = P(6) = \frac{1}{6}$.
On peut résumer cette loi par le tableau suivant :

x_i	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la propriété 17 du chapitre 4,

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la propriété 17 du chapitre 4,

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k)$$

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la propriété 17 du chapitre 4,

$$\begin{aligned} &P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) \\ &= P(\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}) \end{aligned}$$

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la propriété 17 du chapitre 4,

$$\begin{aligned}
&P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) \\
&= P(\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}) \\
&= P(\Omega)
\end{aligned}$$

Propriété 13

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

D'après la propriété 10, les évènements $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ..., $\{X = x_k\}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la propriété 17 du chapitre 4,

$$\begin{aligned}
&P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) \\
&= P(\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}) \\
&= P(\Omega) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$