Corrigés d'exercices sur le produit scalaire

Sont corrigés, ci-dessous, les exercices 45, 46, 59, 72, 83, 100, 105, Bilan 4 et Bilan 5 p. 257-271.

Exercice 1 (45 p. 257)**.**

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 4 \times \cos(45°) = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10\sqrt{2}}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$. Or, $AH = 4$ et, dans le triangle BHC rectangle en H, $HC^2 = BC^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ donc $HC = 3$ et ainsi $AC = 7$. Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 7 = 28}$.

Exercice 2 (46 p. 257)**.**

1. D'après la première identité de polarisation,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}(4^2 - 7^2 - 6^2)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{69}{2}}$.

2. Les coordonnées des vecteurs sont $\overrightarrow{AB}\,(7\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(4\,;4)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times 4 + 1 \times 4$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32}$.

Exercice 3 (59 p. 258)**.**

1. En projetant $\vec{v}$ sur la droite portant $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 = 10$.
2. Comme les vecteurs sont colinéaires de sens contraires, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \times 3 = -15$.
3. En projetant $\vec{u}$ sur la droite portant $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 3 = -6$.
4. En projetant $\vec{u}$ sur la droite portant $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times 4 = -8$.

Exercice 4 (72 p. 258)**.**

1. D'après la première identité de polarisation,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}(3^2 - 4^2 - 6^2)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{43}{2}}$.

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 5 \times 3$ donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 15}$.

Remarque. — Connaître la longueur de AB n'a pas d'intérêt ici.

3. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2 \times 1$ donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2}$.

Remarque. — Connaître la longueur de AB n'a pas d'intérêt ici.

4. Il manque ici une information : le repère est-il orthonormé ou pas ? Nous supposons que c'est le cas (et donc 1 carreau correspond à une demie unité).

Les coordonnées des vecteurs sont $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;-1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(1{,}5\,;-2{,}5)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -3 \times 1{,}5 + (-1) \times (-2{,}5)$ i.e. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2}$.

Exercice 5 (83 p. 260)**.**

1. On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= 0 - DA \times BC + AI \times AB + 0 \\
&= -a \times a + \frac{b}{2} \times b
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2 - 2a^2}{2}}$.

2. On a $(DI) \perp (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Or,

$$\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow |b| = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,|a|$$

et, comme a et b sont positifs, on conclut que $\boxed{(DI) \perp (AC) \text{ si et seulement si } b = a\sqrt{2}}$.

Exercice 6 (100 p. 262)**.**

1. Par propriété, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc, comme $AB = 4$, $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 4}$.

2. **a.** Supposons que $k = -7$. Alors,

$$M \in L_k \Leftrightarrow -7 = MI^2 - 4 \Leftrightarrow MI^2 = -3.$$

Or, pour tout point M, $MI^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{L_{-7} = \varnothing}$.

b. Supposons que $k = -4$. Alors,

$$M \in L_k \Leftrightarrow -4 = MI^2 - 4 \Leftrightarrow MI^2 = 0 \Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M = I.$$

Ainsi, $\boxed{L_{-4} = \{I\}}$.

c. Supposons que $k = 0$. Alors,

$$M \in L_k \Leftrightarrow 0 = MI^2 - 4 \Leftrightarrow MI^2 = 4 \Leftrightarrow MI = 2.$$

Ainsi, $\boxed{L_4 \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 2}$.

d. Supposons que $k = 5$. Alors,

$$M \in L_k \Leftrightarrow 5 = MI^2 - 4 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3.$$

Ainsi, $\boxed{L_5 \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 3}$.

3. Pour tout réel k,
$$M \in L_k \Leftrightarrow k = MI^2 - 4 \Leftrightarrow MI^2 = 4 + k.$$
Si $k < -4$ alors $4 + k < 0$ donc $L_k = \varnothing$.
Si $k = -4$, on a vu que $L_k = \{I\}$.
Si $k > -4$ alors $4 + k > 0$ donc $M \in L_k$ si et seulement si $MI = \sqrt{4+k}$ et ainsi L_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{4+k}$.

4. Le point C appartient à L_k si et seulement si $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = k$. Or, comme ABC est équilatéral, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB}) = 4 \times 4 \times \cos(60°) = 8$. Ainsi, si $C \in L_k$ alors $\boxed{k = 8}$.

Exercice 7 (105 p. 263)**.**

1. Soit M un point du plan. Posons $K = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$. En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
K &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{0} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0}$.

2. Notons H le point d'intersection des hauteurs de ABC issues de A et de B. Alors, en appliquant le résultat de la question **1.** avec $M = H$, il vient $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Or, par définition d'une hauteur, $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ donc $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et ainsi $(HC) \perp (AB)$. Dès lors, (HC) est la hauteur de ABC issue de C dont H appartient bien à cette troisième hauteur. On conclut donc que $\boxed{\text{les 3 hauteurs de } ABC \text{ sont concourantes en } H}$.

Exercice 8 (Bilan 4 p. 271)**.** Voir le corrigé p. 411.

Exercice 9 (Bilan 5 p. 271)**.** D'après la formule d'Al-Kashi,

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \times BC \times BA \times \cos(\widehat{ABC}) = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(60°) = 52$$

donc $\boxed{AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$.

Par propriété, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BI^2 - \frac{1}{4}AC^2$ donc

$$BI^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}AC^2 = BA \times BC \times \cos(\widehat{ACB}) + \frac{1}{4}AC^2 = 6 \times 8 \times \cos(60°) + \frac{52}{4} = 37$$

donc $\boxed{BI = \sqrt{37}}$.