Corrigés des exercices donnés pour le mardi 28 avril 2020

Exercice 32 p. 190

1. Comme $2 < 5{,}6$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^2 < \mathrm{e}^{5{,}6}$.
2. Comme $-1{,}3 > -8$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-1{,}3} > \mathrm{e}^{-8}$.
3. Comme $0{,}1 > -10$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{0{,}1} > \mathrm{e}^{-10}$.
4. Comme $1 < 2{,}7$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e = \mathrm{e}^1 < \mathrm{e}^{2{,}7}$.

Exercice 34 p. 190

1. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{3x} > 0$ donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{3x} = 0$ est $\varnothing$.
2. Pour tout réel x, on a
$$\mathrm{e}^{2x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow 0.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x} = 0$ est $\{0\}$.
3. Pour la même raison que dans l'exemple **1.**, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = -3$ est $\varnothing$.
4. Pour tout réel x, on a
$$\mathrm{e}^{-3x+6} = e \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x+6} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow -3x + 6 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^{-3x+6} = e$ est $\{\frac{5}{3}\}$.

Exercice 73 p. 193

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + 3$. Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **4.** La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto -2x$ suivie de la fonction exponentielle. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - (-2\mathrm{e}^{-2x}) = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$. Or, la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ et ainsi $f'(x) > 0$. On conclut que f est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

Exercice 74 p. 193

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différences de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x,
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$$
donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,; 0\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $s \in \left[0\,; +\infty\right[$. On en déduit que f est croissante sur $\left]-\infty\,; 0\right]$ et décroissante sur $\left[0\,; +\infty\right[$.

4. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ suivie de la fonction exponentielle. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi, pour tout réel x,
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 - 2\mathrm{e}^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow 0 \geqslant 2x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$$
donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,; 0\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $s \in \left[0\,; +\infty\right[$. On en déduit que f est croissante sur $\left]-\infty\,; 0\right]$ et décroissante sur $\left[0\,; +\infty\right[$.

Exercice 75 p. 193

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 2x + 1$ suivie de la fonction exponentielle et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+1}$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x+1} > 0$ et donc $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto -3x + 2$ suivie de la fonction exponentielle et sa dérivée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -3\mathrm{e}^{-3x+2}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f'(x) = -12\mathrm{e}^{-3x+2}$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-3x+2} > 0$ et donc $f'(x) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 78 p. 193

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ suivie de la fonction exponentielle. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$2(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 3) = 2\left((\mathrm{e}^x)^2 + 3\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 3\right) = 2(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3) = 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x - 6.$$

On a donc bien, pour tout réel x, $f'(x) = 2(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 3)$.

2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2(\mathrm{e}^x + 3) > 0$. Dès lors, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe de $\mathrm{e}^x - 1$. Or,

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

On conclut donc que $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [0\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;0]$.

3. On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Exercice 79 p. 193

1. Les fonction $x \mapsto x + 2$ et exp sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \neq 0$ donc, par quotient, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{e}^x - (x+2) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1 - x - 2)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-x-1}{\mathrm{e}^x}.$$

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x - 1$. On en déduit que $f'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant -1$.

c. On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

On a $f(-1) = \dfrac{-1+2}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = e$.

3. **a.** Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 est $f'(-1) = 0$ donc cette tangente est horizontale.

b. Une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or, $f(0) = \dfrac{0+2}{\mathrm{e}^0} = 2$ et $f'(0) = \dfrac{-0-1}{\mathrm{e}^0} = -1$ donc $T : y = -x + 2$.