Corrigés des exercices donnés pour le mardi 26 mai 2020

Exercice 53 p. 357

1. a. La variable aléatoire X prend les valeurs 4, 5, 7, 8 et 10 i.e. $X(\Omega) = \{4\,;5\,;7\,;8\,;10\}$.

b. Pour déterminer la loi de X, on utilise les fréquences données par le tableau de l'énoncé :

x_i	4	5	7	8	10
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{56}$	$\frac{11}{112}$	$\frac{37}{112}$	$\frac{45}{112}$	$\frac{13}{112}$

2. La probabilité que la machine tombe en panne pendant la période de garantie est $P(X \leqslant 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{3}{56} + \frac{11}{112} = \frac{17}{112}$.

3. Avec l'extension, la période de garantie est de 7 ans. Ainsi, la probabilité que la machine tombe en panne pendant cette période est

$$P(X \leqslant 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{56} + \frac{11}{112} + \frac{37}{112} = \frac{27}{56} < 0{,}5$$

donc il y a moins d'une chance sur deux que la machine tombe en panne pendant la période de garantie.

Exercice 56 p. 357

1. La variable aléatoire X prend les valeurs $0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$, $0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$ et $0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5$. On déduit des données de l'énoncé que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0,3	0,4	0, 5
$p(X = x_i)$	0,4	0,45	0,15

2. L'espérance de X est

$$E(X) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}45 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}5 = 0{,}375.$$

Cela signifie que le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise est 0,375 euro par boisson.

3. On en déduit que le bénéfice moyen sur un mois est $0{,}375 \times 2500 = 937{,}5$ euros.

Exercice 69 p. 360.

1.

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S	8	8	16
Sans le défaut S	4	180	184
Total	12	188	200

2. **a.** Si l'objet n'a aucun défaut, le bénéfice algébrique est $250-200=50$ euros.
Si l'objet présente seulement le défaut S, le bénéfice algébrique est $250\times(1-\frac{15}{100})-200=$ 12,5 euros.
Si l'objet présente seulement le défaut F, le bénéfice algébrique est $250-200-45=5$ euros.
Si l'objet présente les deux défauts, le bénéfice algébrique est $250-200-58=-8$ euros.
Ainsi, avec les données du tableau, on déduit que la loi de X est la suivante :

x_i	50	12,5	5	-8
$p(X=x_i)$	0,9	0,04	0,02	0,04

b. $P(X\leqslant 0)=P(X=-8)=0{,}04$. Cela signifie que pour chaque objet vendu, l'entreprise a une probabilité 0,04 de perdre de l'argent c'est-à-dire de travailler à perte.

Exercice 86 p. 364
Partie A

1. **a.** La fonction `simul` tire au hasard entier entre 0 et 36 correspondant au numéro sur lequel le joueur mise et, toujours au hasard, un autre entier en 0 et 36 correspondant au numéro sorti sur la roulette. Si le numéro sorti est celui sur lequel le joueur a misé, la fonction renvoie 35 fois la mise et sinon elle renvoie l'opposé de la mise. Cela correspond bien au gain algébrique car si le joueur mise m alors, dans le premier cas, son gain algébrique est $35m+m-m=35$ et, dans le second cas, $0-m=-m$.
b. En faisant 50 simulations, j'ai gagné 2 fois. Le fréquence de victoire est donc faible.
2. **a.** La variable X prend deux valeurs : 35 si le joueur gagne et -1 si le joueur perd. En modélisant le choix d'un entier au hasard entre 0 et 36 par l'équiprobabilité sur l'ensemble des entiers entre 0 et 36, on a $P(X=35)=\frac{1}{37}$ et $P(X=-1)=\frac{36}{37}$.
Ainsi, la probabilité de gagner est environ 0,03 et dans mes simulations la fréquence de gain était de 0,04, ce qui est du même ordre de grandeur.
b. L'espérance de X est $E(X)=\frac{1}{36}\times 35+\frac{35}{36}\times(-1)=-\frac{1}{37}$. Ainsi, un joueur qui mise 1 euro perd en moyenne environ 3 centimes.

Partie B

1. **a.** Lors de la première partie, il mise 1 euro et ne gagne rien (donc il perd 1 euros) et lors de la seconde partie, il mise 2 euros et gagne $35\times 2+2-2=70$ euros. Ainsi, sa mise totale est bien 3 euros et son gain algébrique sur l'ensemble des deux parties est 69 euros.
b. Lors de la première partie, il mise 1 euro et ne gagne rien (donc il perd 1 euros), lors de la deuxième partie, il mise 2 euros et ne gagne rien (donc il perd 2 euros) et lors de la troisième partie, il mise 4 euros et gagne $35\times 4+4-4=140$ euros. Ainsi, sa mise totale est bien 7 euros et son gain algébrique sur l'ensemble des trois parties est 137 euros.
c. S'il gagne au bout de quatre parties, il a misé successivement 1, 2, 4 et 8 euros et a récolté $36*8=304$ euros donc son gain algébrique est $304-(1+2+4+8)=289$ euros.
De même s'il gagne au bout de six parties, son gain algébrique est $36*32-(1+2+4+8+16+32)=1089$ euros.

d. La fonction `martingale` simule la martingale classique car la variable `mise`, initialisée à 1, est doublée à chaque nouvelle partie perdue et la boucle `while` continue tant que le joueur ne gagne pas. La variable `somme` cumule les mises et la variable `n` compte le nombre de parties jouées.

La fonction renvoie le nombre `n` de parties nécessaires pour gagner, la somme totale misée et le gain algébrique lors de la dernière partie.

Remarque. Ainsi, si on note n, s et m les valeurs renvoyés par la fonction martingale, le gain algébrique global est donc $m - s + 2^{n-1}$ car la dernière mise de 2^{n-1} est ajouté à s mais (déjà) retirée à m.

e. Voici les valeurs obtenues lors de 10 appels successifs de la fonction `martingale` :

```
>>> martingale()
(2, 3, 70)
>>> martingale()
(5, 31, 560)
>>> martingale()
(70, 1180591620717411303423, 20660353362554697809920)
>>> martingale()
(40, 1099511627775, 19241453486080)
>>> martingale()
(70, 1180591620717411303423, 20660353362554697809920)
>>> martingale()
(20, 1048575, 18350080)
>>> martingale()
(51, 2251799813685247, 39406496739491840)
>>> martingale()
(13, 8191, 143360)
>>> martingale()
(19, 524287, 9175040)
>>> martingale()
(6, 63, 1120)
```

Avec une telle martingale, on est sûr de gagner mais... il faut être en capacité de miser des sommes considérables (jusqu'à mille milliards de milliards d'euros dans la simulation précédente) ce qui est en pratique irréalisable.

Exercice 7 p. 376.
Partie A

1. Notons A l'évènement « l'appareil présente la panne « a » » et B l'évènement « l'appareil présente la panne « b » ». La probabilité que l'appareil présente au moins l'une des deux pannes est

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}05 + 0{,}03 - 0{,}01 = 0{,}07.$$

2. La probabilité que l'appareil présente la panne « a » mais pas la panne « b » est $P(A \cap \overline{B})$. Or, comme B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers, par la formule des probabilités totales, $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$ donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}05 - 0{,}01 = 0{,}04.$$

3. La probabilité que l'appareil ne présente aucune panne est

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93.$$

Partie B

1. La variable aléatoire X prend les valeurs 200 (s'il n'y a aucun panne), $200 + 60 = 260$ (s'il y a seulement une panne « a »), $200 + 40 = 240$ (s'il y a seulement une panne « b ») et $200 + 60 + 40 = 300$ (s'il y a les deux pannes).
2. On déduit de la partie A le loi de X :

x_i	200	240	260	300
$p(X = x_i)$	0,93	0,02	0,04	0,01

3. L'espérance de X est

$$E(X) = 0{,}93 \times 200 + 0{,}02 \times 240 + 0{,}04 \times 260 + 0{,}01 \times 300 = 204{,}2.$$

Ainsi, le coût moyen d'un appareil est 204,20 euros.

4. La variance est

$$V(X) = 0{,}93 \times 200^2 + 0{,}02 \times 240^2 + 0{,}04 \times 260^2 + 0{,}01 \times 300^2 - 204{,}2^2 = 258{,}36$$

et l'écart-type est

$$\sigma(X) = \sqrt{X} \approx 16{,}07.$$

Cet écart-type est plutôt faible par rapport aux valeurs de X ce qui signifie que la plupart des valeurs sont plutôt proches de l'espérance. Autrement, dans la plupart des cas, le coût sera proche de 204,20, ce qui se voit bien sur le tableau.