Corrigés des exercices donnés pour le vendredi 24 avril 2020

Exercice 69 p. 193

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de $x-3$. Ainsi, $f(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;3]$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [3\,;+\infty[$.

4. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de x^2+x-6. Or, $x_1 = 2$ est une racine évidente de ce trinôme donc l'autre racine x_2 vérifie $x_1x_2 = \frac{-6}{1} = -6$ et ainsi $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$. Comme le coefficient dominant du trinôme est $a = 1 > 0$, on en déduit que $x^2+x-6 \geqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[$ et $x^2+x-6 \leqslant 0$ si $x \in [-3\,;2]$. On conclut donc que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;-3] \cup [2\,;+\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in [-3\,;2]$.

Exercice 70 p. 193

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^x + 3 > 0$ et ainsi le signe de $f(x)$ est le signe de $2x+5$. Ainsi, $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Étudions le signe de chaque terme :

$$x+7 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -7$$

et

$$e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-7		0		$+\infty$
signe de $x+7x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $f(x) \geqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;-7] \cup [0\,;+\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in [-7\,;0]$.

Exercice 71 p. 193

1. Pour tout réel x, $f(x) = e^x(4x-1)$. Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de $4x-1$. On en déduit que $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right]$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = e^x(-3-2x)$. Or, pour tout réel x, $e^x > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le signe de $-3-2x$. On en déduit que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 89 p. 194

1. Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul (pour que la fraction existe !).
   Pour tout réel x, $e^x \neq 0$ donc
   $$\frac{-4x+1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow -4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{-4x+1}{e^x} = 0$ est $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.
2. De même, pour tout réel x, $e^x + 7 > 0$ donc
   $$\frac{e^x-1}{e^x+7} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$
   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{e^x-1}{e^x+7} = 0$ est $\{0\}$.

3. Attention, ici le second membre n'est pas égal à 0. On peut, dans ce cas, utiliser les produit en croix : pour tous réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$.
Dans notre cas, $a = 5\mathrm{e}^x - 1$, $b = \mathrm{e}^x + 1$, $c = 1$ et $d = 1$.
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ donc

$$\begin{aligned}\frac{5\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 1} = 1 &\Leftrightarrow 5\mathrm{e}^x - 3 = 1 \times (\mathrm{e}^x + 1) \Leftrightarrow 5\mathrm{e}^x - 3 = \mathrm{e}^x + 1\\ &\Leftrightarrow 5\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = 1 + 3 \Leftrightarrow 4\mathrm{e}^x = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{5\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 1} = 1$ est $\{0\}$.

Exercice 90 p. 194

Dans l'énoncé, il manque « $= 0$ » après $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3$. Ainsi, l'équation (E) est $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$.

1. Remarque : l'énoncé manque de précision. On va montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est solution de (E').
En effet, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$ donc

$$\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0.$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si X est solution de (E').

2. On remarque que $x_1 = 1$ est une solution évidente de (E') donc l'autre solution x_2 vérifie $x_1x_2 = \frac{-3}{1} = -3$ et ainsi $x_2 = -3$. Dès lors, l'ensemble des solutions des (E') est $\{1\,;-3\}$.

3. Ainsi,

$$(E) \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -3.$$

Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\mathrm{e}^x \neq -3$ donc

$$(E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\{0\}$.

Exercice 91 p. 194

1. Posons, pour tout réel x, $X = \mathrm{e}^x$. Alors, x est solution de $(E) : \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4 = 0$ si et seulement si X est solution de $(E') : X^2 + 3X - 4 = 0$.
Là encore, 1 est solution évidente de (E') et l'autre solution est $x_2 = -4$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est $\{1\ -4\}$. Dès lors,

$$(E) \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0$$

car $-4 < 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.
On conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\{0\}$.

2. Posons, pour tout réel x, $X = \mathrm{e}^x$. Alors, x est solution de $(E) : \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$ si et seulement si X est solution de $(E') : X^2 + 4X + 3 = 0$.
Ici, -1 est solution évidente de (E') et l'autre solution vérifie $(-1) \times x_2 = 3$ donc $x_2 = -3$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est $\{-1\ -3\}$. Dès lors,

$$(E) \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = -3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -4$$

et donc, comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, on conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $\varnothing$.