Corrigés des exercices donnés pour le mardi 24 mars 2020

Exercice 75 p. 158

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1200$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 100$. Il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 100 donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + 100n = 1200 + 100n}$.

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1100$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \frac{8}{100}v_n = 1{,}08v_n$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,08 donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times 1{,}08^n = 1100 \times 1{,}08^n}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient le tableau suivant (la première colonne correspondant à (u_n) et la seconde à (v_n)).

3	1500	1385.683
4	1600	1496.538
5	1700	1616.261
6	1800	1745.562
7	1900	1885.207
8	2000	2036.023
9	2100	2198.905
10	2200	2374.817

Il semble donc que, pour $n \leqslant 7$, la rémunération de type 1 soit plus avantageuse et que, pour $n \geqslant 8$, la rémunération de type 2 soit plus avantageuse.

3. Attention, il ne faut pas simplement regarder le salaire au bout de 10 ans mais l'ensemble des salaires cumulés sur les 10 années.

Avec le type 1, l'ensemble des salaires cumulés est

$$\begin{aligned}12 \times u_0 + 12 \times u_1 + \cdots + 12 \times u_9 = 12(u_0 + u_1 + \cdots + u_9) &= 12 \times 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2}\\ &= 120 \times \frac{1200 + (1200 + 9 \times 100)}{2} = 198000\end{aligned}$$

et avec le type 2, l'ensemble des salaires cumulé est

$$\begin{aligned}12 \times v_0 + 12 \times v_1 + \cdots + 12 \times v_9 = 12(v_0 + v_1 + \cdots + v_9) &= 12 \times v_0 \times \frac{1 - 1{,}08^{10}}{1 - 1{,}08}\\ &= 13200 \times \frac{1 - 1{,}08^{10}}{-0{,}08} \approx 19122\end{aligned}$$

Ainsi, même si le salaire final, au bout de 10 ans, est plus avantageux avec le type 2, les gains cumulés pendant les 10 ans sont plus importants avec le type 1.

Une personne restant exactement 10 ans dans l'entreprise a intérêt à choisir le contrat de type 1.

Exercice 115 p. 164

1. a. $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{5u_0}{2u_0 + 5} = \dfrac{5 \times 1}{2 \times 1 + 5} = \dfrac{5}{7}$.

$u_2 = u_{1+1} = \dfrac{5 \times \frac{5}{7}}{2 \times \frac{5}{7} + 5} = \dfrac{(5 \times \frac{5}{7}) \times 7}{(2 \times \frac{5}{7} + 5) \times 7} = \dfrac{25}{10 + 35} = \dfrac{25}{45} = \dfrac{5}{9}$.

$u_3 = u_{2+1} = \dfrac{(5 \times \frac{5}{9}) \times 9}{(2 \times \frac{5}{9} + 5) \times 9} = \dfrac{25}{10 + 45} = \dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11}$.

b. Comme $u_1 - u_0 = -\frac{10}{63}$ et $u_2 - u_1 = -\frac{10}{99}$, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

c. $\dfrac{1}{u_0} = 1$, $\dfrac{1}{u_1} = \dfrac{7}{5}$, $\dfrac{1}{u_2} = \dfrac{9}{5}$ et $\dfrac{1}{u_3} = \dfrac{11}{5}$. On constate que ces termes sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison $\dfrac{2}{5}$ car $\dfrac{7}{5} = 1 + \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{9}{5} = \dfrac{7}{5} + \dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{11}{5} = \dfrac{9}{5} + \dfrac{2}{5}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{5u_n}{2u_n+5}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+5}{5u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2}{5} + \frac{5}{5u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2}{5} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{5}$.

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2}{5}}$.

b. Comme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{1} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{2}{5}n$ c'est-à-dire $\boxed{v_n = \dfrac{5+2n}{5}}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ c'est-à-dire $\boxed{u_n = \dfrac{5}{5+2n}}$.

Exercice 128 p. 164

Note Bene : Vous ne pouviez pas encore faire la question **4.b.** Vous pouvez la traiter avec le cours d'aujourd'hui.

1. $u_1 = u_{0+1} = 0{,}8u_0 + 18 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 70$ et $u_2 = u_{1+1} = 0{,}8u_1 + 18 = 0{,}8 \times 70 + 18 = 74$.

2. On a $u_1 - u_0 = 70 - 65 = 5$ et $u_2 - u_1 = 74 - 70 = 4$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et ainsi (u_n) n'est pas arithmétique.

De même, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{14}{23}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{37}{35}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ et ainsi (u_n) n'est pas géométrique.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0{,}8u_n + 18 - 90 = 0{,}8u_n - 72 = 0{,}8\left(u_n - \frac{72}{0{,}8}\right) = 0{,}8(u_n - 90)$$

donc $\boxed{v_{n+1} = 0{,}8v_n}$.

b. On en déduit que (v_n) est géométrique de raison 0,8.

c. Comme $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = -25 \times 0{,}8^n}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 90 + v_n$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n}$.

d. On a donc $u_{10} = 90 - 25 \times 0{,}8^{10}$ (soit environ 87,3).

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 90 - 25 \times 0{,}8^{n+1} - (90 - 25 \times 0{,}8^n) = 90 - 25 \times 0{,}8^{n+1} - 90 + 25 \times 0{,}8^n \\ &= -25 \times 0{,}8^{n+1} + 25 \times 0{,}8^n = -25 \times 0{,}8^n \times 0{,}8 + 25 \times 0{,}8^n \\ &= (-0{,}8 + 1) \times 25 \times 0{,}8^n = 0{,}2 \times 25 \times 0{,}8^n \\ &= 5 \times 0{,}8^n \end{aligned}$$

Or, $5 > 0$ et $0{,}8 > 0$ donc $5 \times 0{,}8^n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$.

On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, en prenant un pas de 10, on obtient le tableau suivant :

n	u_n
0	65
10	87.31565
20	89.71177
30	89.96905
40	89.99668
50	89.99964
60	89.99996

On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 90$.

Exercice 137 p. 169

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre de cartes nécessaires pour construire un château à n niveaux. On a donc $u_1 = 2$, $u_2 = 7$ et $u_3 = 15$.

Pour construire un château à n niveaux, on besoin de $1+2+3+\cdots+(n-1)$ cartes placées horizontalement et de $2+4+6+\cdots+2n$ cartes placées en biais. Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_n &= 1+2+3+\cdots+(n-1)+2+4+6+\cdots+2n \\
&= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 2(1+2+3+\cdots+n) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2-n+2n^2+2n}{2} \\
&= \frac{3n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{10} = \dfrac{3\times 10^2+10}{2} = 155$ donc il faut 155 cartes pour construire un château à 10 niveaux.

Une autre façon de voir les choses est de dire qu'au niveau k (en partant du haut) du château, on a k « triangles » de cartes c'est-à-dire $3k$ cartes sauf au niveau n (le plus bas) où les triangles n'ont pas de bases et où il y a donc seulement $2n$ cartes. Ainsi,

$$\begin{aligned}
u_n &= 3\times 1+3\times 2+3\times 3+\cdots+3\times(n-1)+2n \\
&= 3(1+2+3+\cdots+n-1)+2n \\
&= 3\times\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}+2n \\
&= \frac{3(n-1)n+4n}{2} \\
&= \frac{3n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

et on conclut de même.