Corrigés des exercices donnés pour le mardi 21 avril 2020

Exercice 63 p. 192

1. Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x + 0 = \mathrm{e}^x$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = 0 - 2 \times \mathrm{e}^x = -2\mathrm{e}^x$.

Exercice 65 p. 192

Rappel. la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto u(ax+b)$ est $x \mapsto a \times u'(ax+b)$.

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ suivie de la fonction exponentielle donc, pour tout réel x, $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{2x} + 0 = 2\mathrm{e}^{2x}$.

2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ suivie de la fonction exponentielle donc, pour tout réel x, $f'(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + 0 = -\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 66 p. 193

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2 \times \mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 67 p. 193

1. La fonction f est la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x+1$ suivie de la fonction exp donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+1}$.

2. La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto -4x-1$ suivie de la fonction exp donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = -4\mathrm{e}^{-4x-1}$.

Comme $f = 2g$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2 \times (-4\mathrm{e}^{-4x-1})$ i.e. $f'(x) = -8\mathrm{e}^{-4x-1}$.

Exercice 99 p. 196

1. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1} \Leftrightarrow 4x = 5x - 1 \Leftrightarrow 1 = x$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$ est $\{1\}$.
2. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36} \Leftrightarrow 4x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$ est $\{-3\,;3\}$.

Exercice 100 p. 196

1. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3} \Leftrightarrow -5x < 6x + 3 \Leftrightarrow -3 < 11x \Leftrightarrow x > \frac{-3}{11}$$
donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3}$ est $\left]-\frac{3}{11}\,;+\infty\right[$.
2. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{7x-1} \geqslant \mathrm{e}^{3x} \Leftrightarrow 7x - 1 \geqslant 3x \Leftrightarrow 4x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{4}$$
donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3}$ est $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.