Corrigés des exercices donnés pour le vendredi 20 mars 2020

Exercice 63 p. 158

1. Il s'agit de la somme des entiers de 1 à 500. D'après le cours (propriété 17),

$$1+2+3+\cdots+500 = 500\times\frac{500+1}{2} = 125250$$

2. Il s'agit de la somme des entiers pairs de 2 à 200 c'est-à-dire la somme de termes de la suite arithmétiques (u_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2n$. On a alors (théorème 19)

$$2+4+6+\cdots+200 = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{100} = 100\times\frac{2+200}{2} = 10100$$

3. Il s'agit de la somme des entiers de 50 à 100. Cette somme comprend 51 termes (100-50+1) donc (propriété 17)

$$50+51+52+\cdots+100 = 51\times\frac{50+100}{2} = 3825$$

4. Il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétiques de raison 3. Plus précisément, si on pose $u_0 = 4$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n+3$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 4+3n$. Ainsi, $u_n = 91$ si et seulement si $4+3n = 91$ i.e. $3n = 87$ soit $n = 29$. Ainsi, la somme contient 30 termes (29-0+1) donc

$$4+7+10+\cdots+91 = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{29} = 30\times\frac{4+91}{2} = 1425$$

Exercice 108 p. 163

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient le tableau suivant :

n	u_n
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19

On peut conjecturer que (u_n) est arithmétique de raison 3 et qu'elle est croissante.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors $(3n+1)(n+5) = 3n^2+15n+n+5 = 3n^2+16n+5$.

3. On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(3n+1)(n+5)}{n+5} = 3n+1$. Ainsi, (u_n) est de la forme : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = u_0+nr$ avec $u_0 = 1$ et $r = 3$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

De plus, comme $3>0$, (u_n) est croissante.

Exercice 109 p. 163

Note Bene : il y a une imprécision dans l'énoncé, on ne nous dit pas à partir de quel rang la suite est définie. Implicitement, il faut considérer que c'est $n = 0$.

Notons r la raison de (u_n). Comme l'énoncé donne la valeur de u_5, on exprime u_n en fonction de u_5 : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = u_5+(n-5)r = -10+(n-5)r$. Ainsi, $u_{10} = -10+5r$, $u_{20} = -10+15r$ et $u_{50} = -10+45r$. Comme $u_{50} = u_{10}+u_{20}$, on en déduit que $-10+45r = -10+5r+(-10+15r)$ c'est-à-dire $-10+45r = -20+20r$. Ainsi, $45r-20r = -20+10$ donc $25r = -10$ c'est-à-dire $r = -\frac{2}{5}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -10 - \frac{2}{5}(n-5)$. En particulier, $u_0 = -10 - \frac{2}{5}(0-5) = -10+2 = -8$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est la suite arithmétique de premier terme } u_0 = -8 \text{ et de raison } r = -\frac{2}{5}}$.

Exercice 110 p. 164

Nota bene : il y a une erreur dans l'énoncé, on a $s_0 = 1850$ et non pas $s_0 = 1500$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n - 165 = s_n + (-165)$ donc (s_n) est une suite arithmétique de raison $r = -165$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = s_0 + nr = 1850 - 165n$.
3. **a.** On cherche n tel que $u_n < 100$:

$$1850 - 165n < 100 \Leftrightarrow 1850 - 100 < 165n \Leftrightarrow 1750 < 165n \Leftrightarrow \frac{1750}{165} < n.$$

Or, $\dfrac{1750}{165} \approx 10{,}6$ donc, comme n est entier, $s_n < 100$ pour $n \geqslant 11$.
Le seuil sera donc atteint 11 mois après le début du plan de réduction. (La production s'arrête donc à l'issue du 11e mois.)

b. Le nombre total N de scooters produit entre le mois 0 et le mois 11 est

$$N = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{11} = 12 \times \frac{s_0 + s_{11}}{2}$$

Or, on a $s_0 = 1850$ et $s_{11} = 1850 - 165 \times 11 = 35$ donc $N = 12 \times \dfrac{1850 + 35}{2} = 11310$.

Exercice 119 p. 165

1. Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison 2. Plus précisément, si on considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 32 \times 2^n$ alors

$$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{12} = u_0 \times \frac{1 - 2^{13}}{1-2} = 32 \times \frac{1 - 8192}{-1} = 262112$$

Remarque : on trouve que $131072 = u_{12}$ en tâtonnant (ou en utilisant un tableau de valeur sur la calculatrice).

2. Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison -3. Plus précisément, si on considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times (-3)^n$ alors

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = u_0 \times \frac{1 - (-3)^{11}}{1 - (-3)} = 2 \times \frac{1 - (-177147)}{4} = 88574.$$

3. Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{5}{3}$. Plus précisément, si on considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (\frac{5}{3})^n$ alors

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = u_0 \times \frac{1 - (\frac{5}{3})^9}{1 - \frac{5}{3}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1953125}{19683}}{-\frac{2}{3}} = \frac{966721}{2187}.$$

4. Il s'agit d'une somme de termes de la suite géométrique de terme général

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{2 \times 2^n}{3 \times 5^n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Ainsi,

$$S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$$

c'est-à-dire $\boxed{S_4 = \frac{10}{9}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}$.